I. 光の基本的性質

Maxwell 方程式

真空中の場合

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & ① \\ \nabla\times\mathbf{H} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & ② \\ \nabla\cdot\mathbf{E} = 0 & ③ \\ \nabla\cdot\mathbf{H} = 0 & ④ \end{cases}$$

（$\mathbf{E}$：電場ベクトル
$\mathbf{H}$：磁場ベクトル
μ_0：真空中透磁率
ε_0：真空中誘電率）

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

①より $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\mu_0 \nabla\times\overset{②}{\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}} = -\mu\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

ベクトル公式 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \underset{③}{\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})} - \nabla^2\mathbf{E}$

$= -\nabla^2\mathbf{E}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\nabla^2\mathbf{E} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}}$ $\left(c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right)$

$\mathbf{H}$についても同様

波動方程式 または **伝播方程式**

（μ「ミュー」
ε「イプシロン」）

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla\times\begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right) \end{pmatrix}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial z} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial z} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

簡単のため、**E**は１成分のみとしてスカラー量で取り扱う。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 E}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 E}{\partial^2 z}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

さらに、Eの空間的変化はz方向のみ（$\{x, y\}$方向は一様）とする。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 z}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

この解は、 $E(z,t)=A\cos(kz\pm kct+\theta)$　　（A, k, θ: 任意定数）　　（θ「シータ」）

$\boxed{\text{速度}c\text{で伝播する正弦波}}$

$(kz - kct + \theta)$だと、$+z$ 方向

$(kz + kct + \theta)$だと、$-z$ 方向

$$E(z_0,t_0)=A\cos(kz_0-kct_0+\theta)$$

$$E(z_0+\Delta z,t_0+\Delta t)=A\cos[k(z_0+\Delta z)-kc(t_0+\Delta t)+\theta]$$

（時間 Δt 後に、距離 Δz だけ並行移動）

⇨ 等号が成り立つには$\Delta z = c\Delta t$

↓

$\Delta z = c\Delta t$ を満たすように並行移動

↓

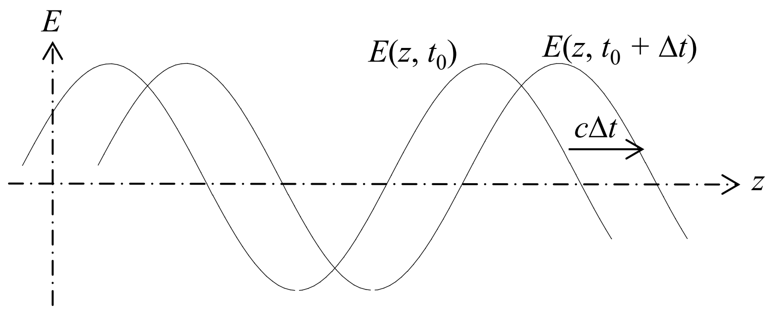
Δtの間に$\Delta z = c\Delta t$だけ移動

↓

移動速度 $=\dfrac{\Delta z}{\Delta t}=c$

$\boxed{\text{光速（空気中）}}$

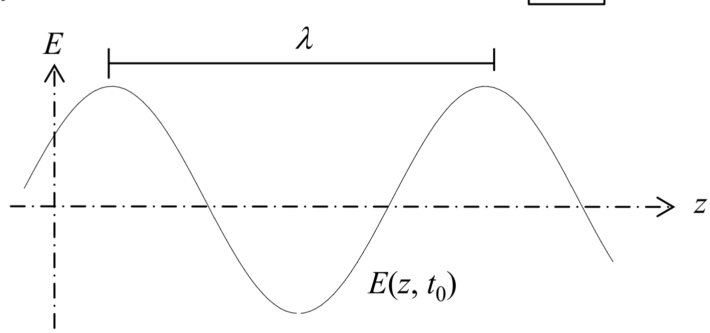
$c = 3 \times 10^8$ m/s



磁場についても同様　$\boxed{\text{振動伝播する電磁場＝電磁波}}$

次に、任意定数 k について考察。

固定時刻 t_0 における空間変化の１周期分の長さを$\boxed{\text{波長}}$と言う。慣習として λ と表記。　　（λ「ラムダ」）



距離 λ だけずれると同じ電場値。これを式で表すと、

$$E(z,t_0)=E(z+\lambda,t_0)$$

$$A\cos[kz-kct_0+\theta]=A\cos[k(z+\lambda)-kct_0+\theta]=A\cos[kz-kct_0+k\lambda+\theta]$$

等式が成り立つには、$k\lambda = 2\pi \longrightarrow k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

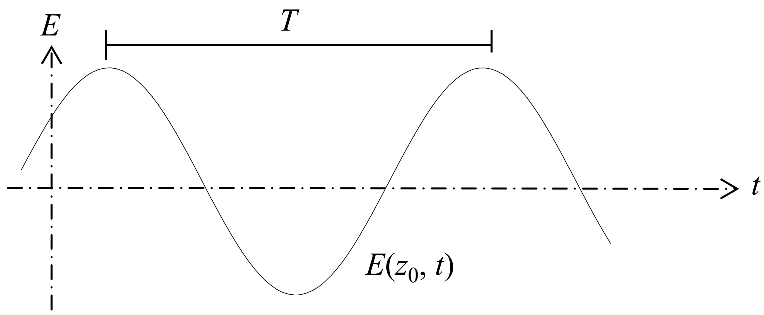
任意定数 k は波長の逆数という物理的意味を持つ。

直観的には空間振動の様子を表すパラメータ。

k:大 $\Rightarrow$ 空間的に密な振動、k:小 $\Rightarrow$ 空間的に疎な振動

そこで、この k を 伝搬定数 と呼ぶ。または、波数。

同様にして、時間振動について考察。
固定位置 z_0 における時間変化の1周期分の時間 を T とする。



時間T だけ経つと同じ電場値。これを式で表すと、

$$E(z_0, t) = E(z_0, t+T)$$

$$A\cos[kz_0 - kct + \theta] = A\cos[kz_0 - kc(t+T) + \theta] = A\cos[kz_0 - kct - kcT + \theta]$$

等式が成り立つには、$kcT = 2\pi \longrightarrow \dfrac{kc}{2\pi} = \dfrac{1}{T}$

ここで、$1/T$ は1秒あたりの振動数＝ 周波数 に他ならない（単位はHz）。これを f と表記すると、

$$\frac{kc}{2\pi} = f \longrightarrow kc = 2\pi f$$

これより、電磁波は次のように表される。

$$E(z,t) = A\cos(kz - 2\pi ft + \theta)$$

あるいは、時間項の係数を簡素化して、

$$E(z,t) = A\cos(kz - \omega t + \theta) \qquad \omega \equiv 2\pi f$$ 角周波数

（ω「オメガ」）

これが電磁波の標準的な表式。

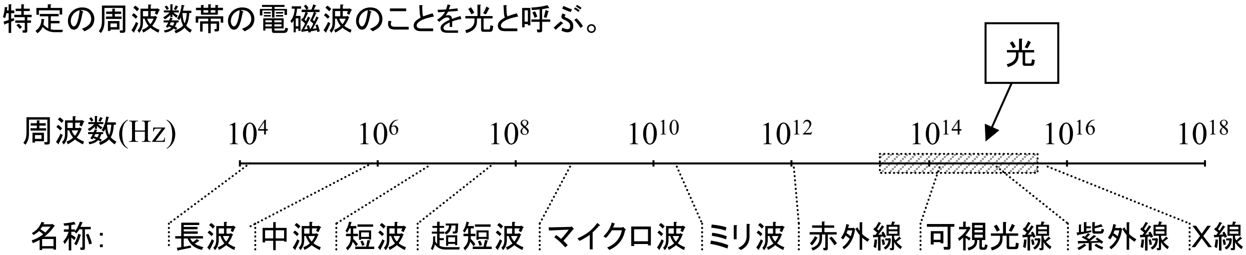
ちなみに、

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \\ kc = 2\pi f \end{array}\right\} f\lambda = c$$

（1秒間に f 回振動
1周期で進む距離は λ） ⇨ 1秒間に進む距離はc

以上は電磁波一般の話。

特定の周波数帯の電磁波のことを光と呼ぶ。



波長λで言うと、

赤外光: > 0.6 μm

可視光: 0.4 – 0.6 μm （長波長は赤、短波長は紫）

紫外光: < 0.4 μm

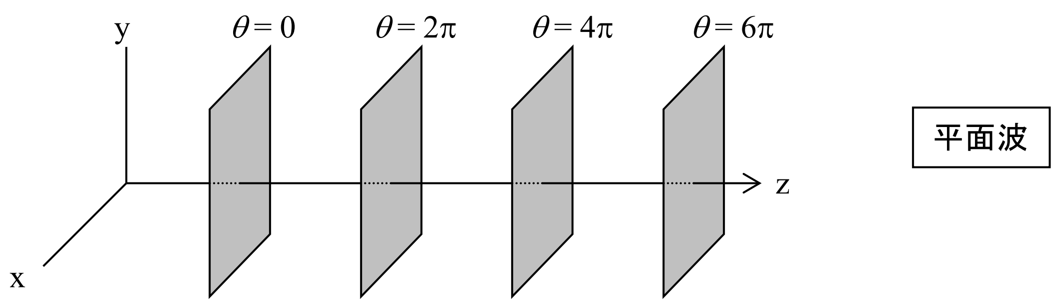
1 μm = 10^{-6} m 「マイクロメータ」 or 「ミクロン」

同じく電磁波であっても、波長によって性質が違う。

直進性、散乱特性、物質透過特性、吸収特性、エネルギー、などなど。

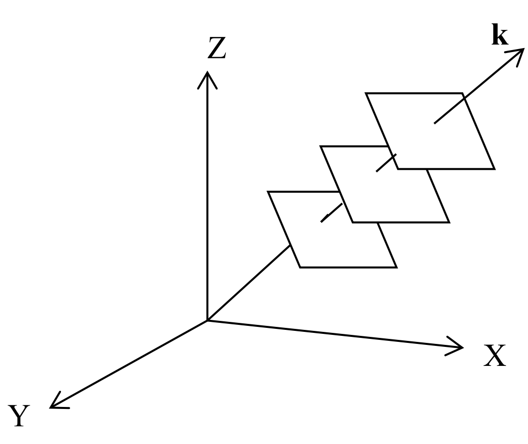
これまでは、E は$\{x, y\}$には依存しないものとした: $E(z, t)$

すなわち $\{x, y\}$方向には一様 、つまりcosの引数(位相)は$\{x, y\}$方向で均一とした:「xyは等位相面」



光ファイバ通信を考える際には、平面波として取り扱って概ねOK。

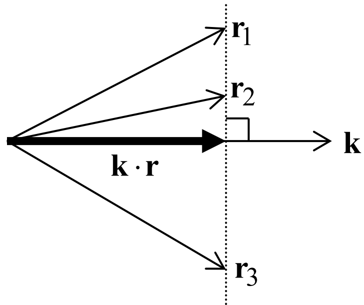
ところで、上記では、z 方向に進む平面波を考えたが、一般の方向の場合は、



進行方向に対して垂直な面が等位相面
この様子を式で表わすと、

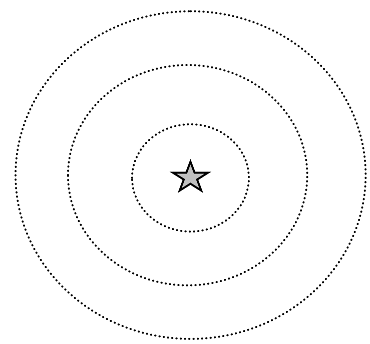
$$U(x,y,z,t) = U_0 \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \theta)$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_0 = (k_{0x}, k_{0y}, k_{0z}) & \text{伝搬ベクトル} \\ \mathbf{r} = (x, y, z) & \end{cases}$$



等位相面： $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathrm{const.}$

球面波



平面波以外の光の伝播の仕方として代表的なものに、
点光源から拡がりながら伝搬する球面波がある。
球面波の表式は波動方程式から以下のように導出される。
波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E}{\partial^2 z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

左辺の空間微分を極座標系で書き直すと、

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E}{\partial^2 z} = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2}$$

なので、

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

等方的に拡がっていく光電場は角度には無依存　→　θ 及び φ に関する微分はゼロ。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rE)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 (rE)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rE)}{\partial t^2}$$

これは、rUをひとつの変数とみると、一次元の伝搬方程式を同じ。
なので、前と同じように解ける。

$$rE = A\cos(k_{\mathrm{r}} r - \omega t + \theta) \longrightarrow E = \frac{A}{r}\cos(k_{\mathrm{r}} r - \omega t + \theta)$$

複素表示

以上では、伝搬方程式の解を正弦波の形で表した。
解としては指数関数形もあり。

伝播方程式: $\dfrac{\partial^2 E}{\partial^2 z} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ ⟶ 解: $E = \tilde{A}e^{i(z-ct)}$ （$\tilde{A}$:複素定数）

or

$E = \tilde{A}e^{i(kz-\omega t)} = Ae^{i(kz-\omega t+\theta)}$ $\boxed{\text{複素表示}}$

（$\tilde{A} = Ae^{i\theta}$; A=実数）

これも伝搬する振動電場（＝電磁波）を表わしているはず。
が、虚数が入っており、実際の物理量には適合しない。 辻褄あわせが必要。
ここで、指数関数形を次のように展開してみる（次頁参照）。

$$E = Ae^{i(kz-\omega t+\theta)} = \boxed{A\cos(kz-\omega t+\theta)} + iA\sin(kz-\omega t+\theta)$$ θ: $\tilde{A}$ の位相

実数部が前出の電磁波の表示と同じ

つまり、複素表示の実数部＝実際の物理量

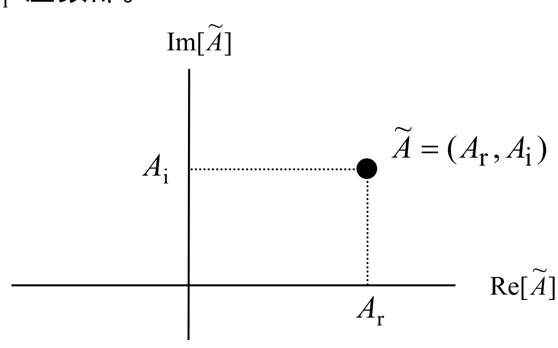
$$\begin{aligned} E(z,t) &= A\cos(kz-\omega t+\theta) \\ &= \mathrm{Re}[\tilde{A}e^{i(kz-\omega t)}] \\ &= \frac{1}{2}\tilde{A}e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \end{aligned}$$ （$c.c.$ 複素共役）

光の分野では、光電場を複素表示で表わすのが一般的。
これは、式の取り扱いが便利なため（特に干渉現象を考えるとき）。
但し、実際の物理量はその実数成分であることを念頭に置く必要あり。
以後、本講義でも複素表示を用いる。

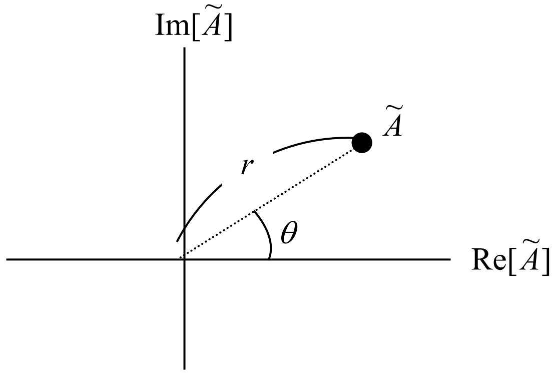
$$E = Ae^{i(kz-\omega t)} = |A|e^{i(kz-\omega t+\theta)}$$

いちいちチルダ（ ̃ ） を付けるのは面倒なので、
特に断らない限り、以後、Aは複素振幅とする。

ここで、波動の複素指数関数表示について補足。
一般に、複素数は二次元平面上の１点として表される。
例えば、$\tilde{A} = A_\mathrm{r} + iA_\mathrm{i}$ は、２次元直交座標系の$(A_\mathrm{r}, A_\mathrm{i})$として表わされる。
但し、A_r: 実数部、A_i: 虚数部。



一方、2次元平面上の点は極座標表示$\{r, \theta\}$でも表すことができる。



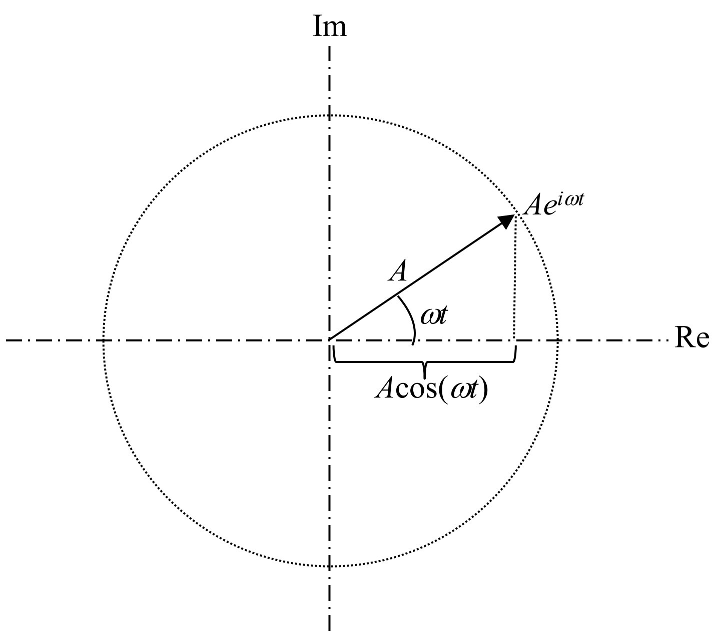
直交座標表示と極座標表示との関係は、

$$\begin{cases} A_\mathrm{r} = r\cos\theta \\ A_\mathrm{i} = r\sin\theta \end{cases}$$

$$r^2 = A_\mathrm{r}^2 + A_\mathrm{i}^2 = (A_\mathrm{r} + iA_\mathrm{i})(A_\mathrm{r} - iA_\mathrm{i}) = \tilde{A} \times \tilde{A}^* = |\tilde{A}|^2 \qquad r = |\tilde{A}|$$

$$\tilde{A} = A_\mathrm{r} + iA_\mathrm{i} = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = |\tilde{A}|(\cos\theta + i\sin\theta) = |\tilde{A}|e^{i\theta}$$

ここで、ある固定点z_0で時間的に振動する波を考える。この振動の様子は、
複素平面において、原点を中心とする同心円上を回転する点で表すことができる。
その実数成分（横軸への射影成分）が実際の物理量。

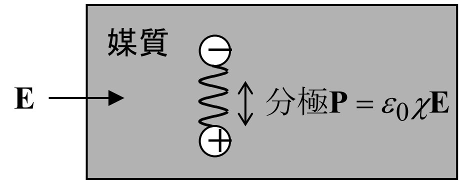


こう考えると、電磁波が複素指数表示で表されることがイメージしやすい。

ここまでは空間を伝搬する光の話。
では、媒質中ではどうか。(但し、光伝搬が考察対象なので、導電性でない媒質＝誘電体を想定。)

誘電体媒質中のMaxwell方程式

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\mathbf{H} = \dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho = 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$



$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \varepsilon_0\chi\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H} \end{array} \right)$$

$$\Downarrow$$

(χ 「カイ」)

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} = -\mu\nabla\times\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2} = -\mu\varepsilon_0(1+\chi)\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1+\chi}{c^2}\frac{\mu}{\mu_0}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2\mathbf{E} = \boxed{\frac{1+\chi}{c^2}\frac{\mu}{\mu_0}}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

真空中

$$\nabla^2\mathbf{E} = \boxed{\frac{1}{c^2}}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

真空中の $\dfrac{1}{c^2}$ が $\dfrac{1+\chi}{c^2}\dfrac{\mu}{\mu_0}$ に置き換わった形

(媒質中) (真空中)

$$\frac{c}{\sqrt{(1+\chi)(\mu/\mu_0)}} \quad \Leftrightarrow \quad c$$

前出のように、c は真空中の伝播速度。

上の考察は、媒質中では $\dfrac{c}{\sqrt{(1+\chi)(\mu/\mu_0)}}$ という速度で電場が伝搬することを示唆している。

光周波数領域では$\mu \approx \mu_0$、また、$\chi > 0$、なので、$\sqrt{(1+\chi)(\mu/\mu_0)} > 1$

つまり、媒質中では光の速度は真空中より遅くなる。

遅くなる割合は $n \equiv \sqrt{(1+\chi)(\mu/\mu_0)}$ で表される。

$\boxed{n:\text{屈折率}}$

媒質中の伝播速度 :$\dfrac{c}{n}$

n を使うと、媒質中の伝播方程式の解は、

$$\left(k_0 = \frac{\omega}{c} \right)$$

$$E(z,t) = A\cos[\frac{\omega}{(c/n)} z - \omega t + \theta] = A\cos(n\frac{\omega}{c} z - \omega t + \theta)$$

$$= A\cos(nk_0 z - \omega t)$$

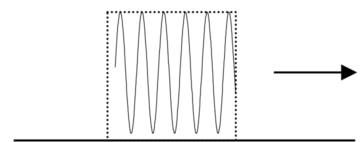
$$= A\cos(kz - \omega t + \theta)$$

$$\boxed{k = nk_0 = \frac{n\omega}{c}\text{: 伝播定数（媒質中）}}$$

なお、屈折率のもう少し詳しい話は「結晶光学」の章にて。

群速度　（パルス光の伝搬について）

これまでは単一周波数の連続波について述べてきた。
一方、信号伝送などではパルス状の光が送信される。
そこで、光パルスの伝搬速度について考える。



手始めに、周波数がわずかに異なる2つの電磁波が同時に伝播しているものとする。

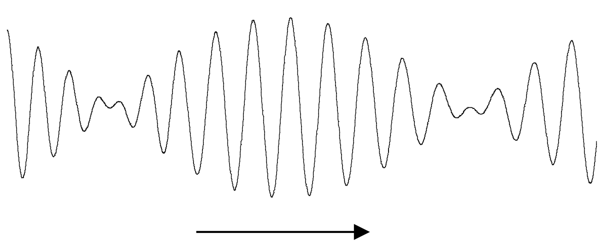
$$E = Ae^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + Ae^{i(k_2 z - \omega_2 t)}$$

$$= Ae^{i(k_0 z - \omega_0 t)}[e^{-i(\Delta kz - \Delta\omega t)} + e^{i(\Delta kz - \Delta\omega t)}]$$

$$= 2Ae^{i(k_0 z - \omega_0 t)}\cos(\Delta kz - \Delta\omega t)$$

$$\left(\begin{aligned} k_0 &= (k_1 + k_2)/2 \\ \omega_0 &= (\omega_1 + \omega_2)/2 \\ \Delta k &= k_2 - k_0 = k_0 - k_1 \\ \Delta\omega &= \omega_2 - \omega_0 = \omega_0 - \omega_1 \end{aligned} \right)$$

上式は、搬送波 $\exp[i(k_0 z - \omega_0 t)]$ の振幅（包絡線）が$\cos(\Delta kz - \Delta\omega t)$で変化することを表している。

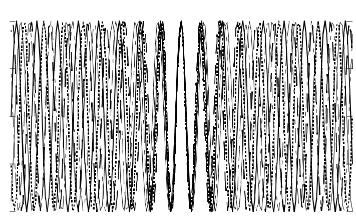


うねり（ビート振動）

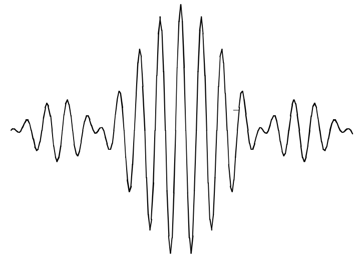
包絡線は速度 $\Delta\omega/\Delta k$ で移動。

さらに波の数を多くしてみる（但し、周波数間隔は等しいとする）。

5つの周波数光の重ね描き



足し合わせた光電場は



つまり、複数の周波数光が位相を揃えて足し合わされるとパルス光になる。
（実はフーリエ級数展開のことを言っています）
$z = 0$での光電場を一般的に表すと、

$$E(0,t) = \int A_\omega e^{i\{(k_0+\Delta k)z-(\omega_0+\Delta\omega)t\}} d(\Delta\omega) + c.c. \qquad k_0,\ \omega_0 : \text{中心値}$$

$\{z = z_0, t = t_0\}$で全成分の位相が揃う、すなわちパルスのピーク位置である、とする。

$$\Delta k z_0 - \Delta\omega t_0 = 0 \qquad \text{（但し、全成分に共通な項は省略）}$$

$\{z = z_0 + \Delta z, t = t_0 + \Delta t\}$における光電場は、

$$E(z_0,t) = \int A_\omega e^{i\{(k_0+\Delta k)(z_0+\Delta z)-(\omega_0+\Delta\omega)(t_0+\Delta t)\}} d(\Delta\omega) + c.c.$$

全成分が同位相の地点にパルスピークが現れる。

$$\Delta k(z_0 + \Delta z) - \Delta\omega(t_0 + \Delta t) = 0$$
$$\Delta k\Delta z - \Delta\omega\Delta t = 0$$
$$\Delta k\Delta z = \Delta\omega\Delta t$$

を満たす$\{z = z_0 + \Delta z, t = t_0 + \Delta t\}$にパルスのピーク。
元々は$\{z = z_0, t = t_0\}$にパルスがあるものとしていたので、その移動速度は、

$$v_\mathrm{g} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

$\{\Delta\omega, \Delta k\}$を微小量として、 $v_\mathrm{g} = \dfrac{d\omega}{dk}$ 群速度

光パルスの移動速度
より詳細には、
全周波数成分の位相が揃う$\{z, t\}$の移動速度。

◆ 一般的に、包絡線の移動速度は群速度 ($d\omega/dk$) で与えられる。

◆ 真空中では、$\omega/k = c$ 、したがって ($d\omega/dk$) = c → 群速度＝位相速度。

◆ 媒質中では、位相速度$\omega/k = c/n$ (n:屈折率）。→ $k = (n/c)\omega$ → $dk = (\omega/c)dn + (n/c)d\omega$

→ 群速度 $(d\omega/dk) = (c/n) - (\omega/n)(dn/dk)$

→ 屈折率一定だと、dn/dk =0、したがって群速度＝位相速度

屈折率が波長によって異なると、群速度≠位相速度

光は横波　ー波の伝播方向と電場の振動方向についてー

再びMaxwell方程式

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0 \qquad \left(\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi)\right)$$

z方向へ進む平面波の各成分は、

$$E = A\exp[i(kz-\omega t)]$$

これを　$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ に代入してみる。

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \boxed{\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0} \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial y} = 0\right)$$

電場は x, y 方向に振動

同様の手順より、磁場も x, y 方向に振動

光は横波

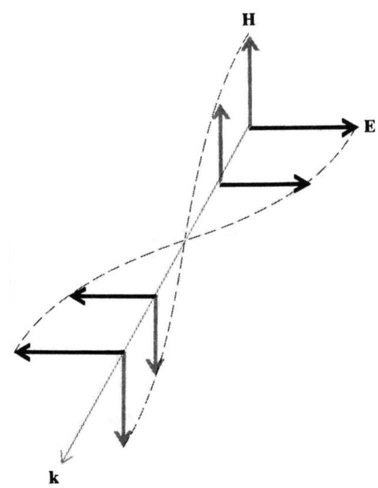
さらに、

$$\nabla\times\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \underbrace{ik\begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{(Maxwell eq.より)}}{=} i\omega\mu\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$E_x = \frac{\omega\mu}{k}H_y \qquad E_y = -\frac{\omega\mu}{k}H_x$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}) = E_xH_x + E_yH_y = 0 \longrightarrow \mathbf{E}\text{と}\mathbf{H}\text{は直交}$$



偏波

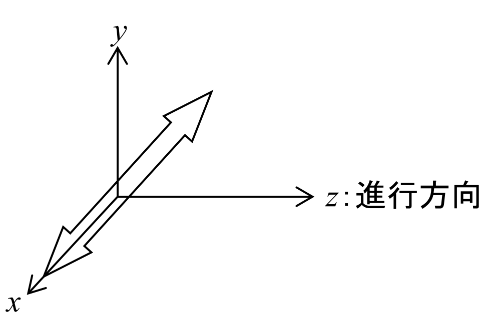
上述のように、平面波の電場振動は進行方向に対して垂直方向。

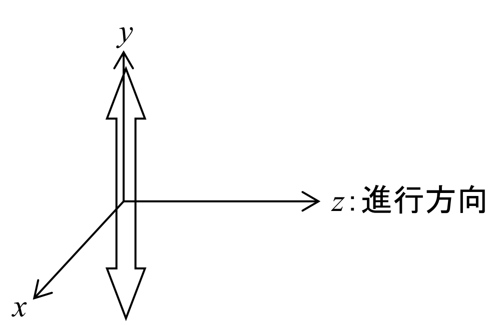
ここで、垂直方向は二次元平面。

従って、進行方向をz 軸とすると、x-y 平面上（二次元平面）で振動する。

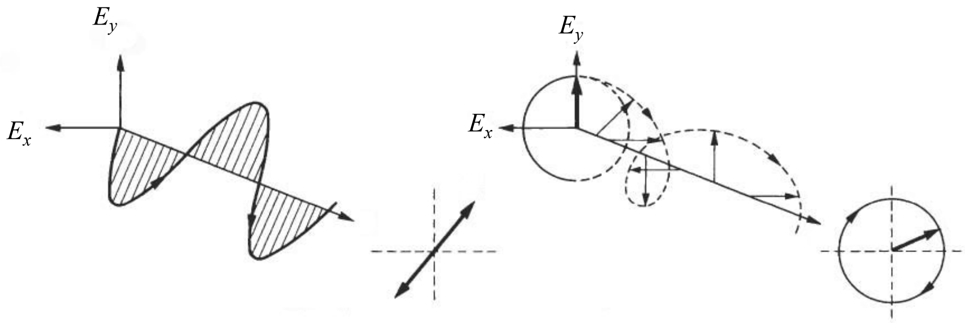
この二次元平面上での振動の様子（偏り具合）を*偏波*という。

基本的なのは、x方向の直線振動とy方向の直線振動。





一般にはこの2つの基本振動の足し合わせ



任意の偏波状態は、x方向振動とy方向振動の合成として表わされる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x A_x e^{i(k_x z - \omega t + \theta_x)} + \mathbf{e}_y A_y e^{i(k_y z - \omega t + \theta_y)}$$
$$= (A_x e^{i(k_x z - \omega t + \theta_x)}, A_y e^{i(k_y z - \omega t + \theta_y)})$$

$\mathbf{e}_x$: x方向単位ベクトル
$\mathbf{e}_y$: y方向単位ベクトル
A_x, A_y : 実数振幅

基本として、$z = 0$ における時間振動の様子をみてみる。

$$\mathbf{E} = (A_x e^{-i(\omega t + \theta_x)}, A_y e^{-i(\omega t + \theta_y)}) = (A_x, A_y e^{i\Delta\theta}) e^{-i(\omega t + \theta_x)} \qquad (\Delta\theta \equiv \theta_x - \theta_y)$$

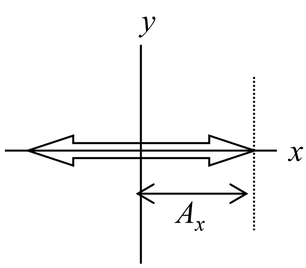
実際の値は実数成分なので、

x成分 : $A_x \cos(\omega t)$　　　　y成分 : $A_y \cos(\omega t - \theta)$

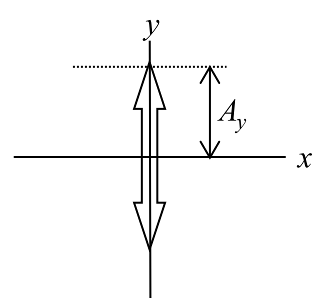
で振動するものとして、その合成ベクトルの動きをみればよい。

以下、いくつかの代表的な偏波状態についてみてみる。

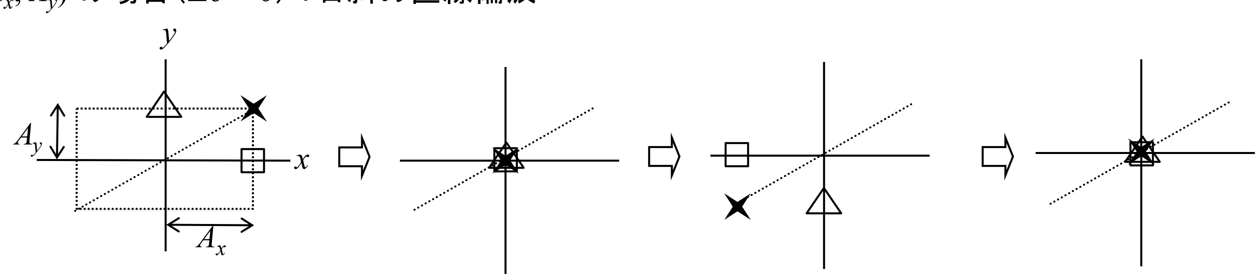
$(A_x, 0)$ の場合（$A_y = 0$）: 横直線偏波



$(0, A_y)$ の場合（$A_x = 0$）: 縦直線偏波

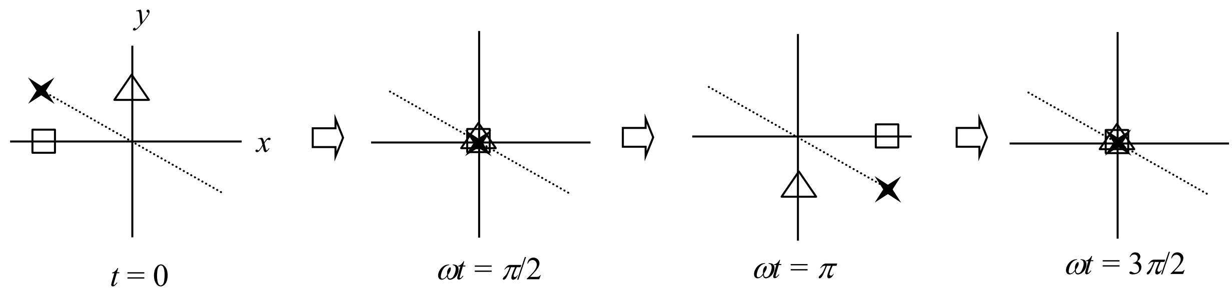


(A_x, A_y) の場合（$\Delta\theta = 0$） : 右斜め直線偏波

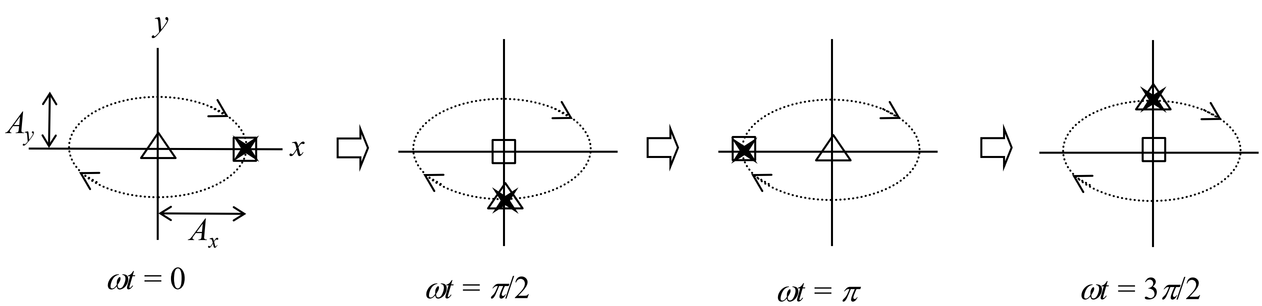


$t = 0$　　$\omega t = \pi/2$　　$\omega t = \pi$　　$\omega t = 3\pi/2$

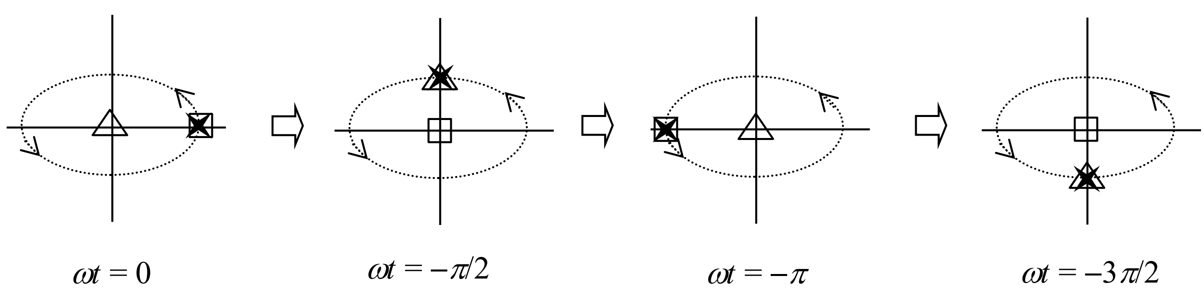
$(A_x, A_y e^{i\pi})$ の場合（$\Delta\theta = \pi$）：左斜め直線偏波



$(A_x, A_y e^{-i\pi/2})$の場合（$\Delta\theta = -\pi/2$）：右回り楕円偏波



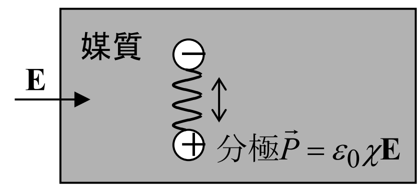
$(A_x, A_y e^{i\pi/2})$の場合（$\Delta\theta = \pi/2$）：左回り楕円偏波



複屈折媒質中の偏波状態

媒質によっては、光電場によって誘起される分極の大きさが振動方向によって異なる（非等方性媒質）。
これに伴い、屈折率も光電場の振動方向によって異なる。

複屈折　　（詳しくは「結晶光学」の章にて）



このような複屈折媒質中を光が伝播すると、偏波状態が変化する。

例えば、

$\{x$振動成分の屈折率n_x、y方向振動成分の屈折率$n_y\}$である媒質を伝播する光電場は、

$$(E_x(0)e^{in_x k_0 z}, E_y(0)e^{in_y k_0 z})e^{-i\omega t}$$
$$\|$$
$$(E_x(0), E_y(0)e^{i\Delta n k_0 z})e^{i(n_x k_0 z-\omega t)}$$

k_0:真空中の伝播定数
$E_x(0), E_y(0)$: $z=0$における$\{x, y\}$成分
$\Delta n = n_y - n_x$:屈折率差

$z=0$において右斜め直線偏波とする。

$$(E_x(0), E_y(0)) = (A_x, A_y)$$

$z=\dfrac{\pi}{2\Delta n k_0}$ では、

$$\left(A_x, A_y \exp[i\Delta n k_0(\pi/2\Delta n k_0)]\right)e^{in_x k_0 z} = \left(A_x, A_y e^{i\pi/2}\right)e^{in_x k_0 z}$$ ：左廻り楕円偏波

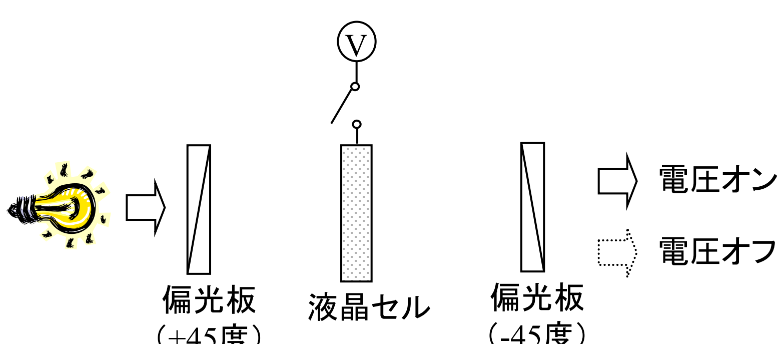
$z=\dfrac{\pi}{\Delta n k_0}$ では、 $\left(A_x, A_y e^{i\pi}\right)e^{in_x k_0 z}$ ：左斜め直線偏波

$z=\dfrac{3\pi}{2\Delta n k_0}$ では、$\left(A_x, A_y e^{i3\pi/2}\right)e^{in_x k_0 z} = \left(A_x, A_y e^{-i\pi/2}\right)e^{in_x k_0 z}$ ：右廻り楕円偏波

$z=\dfrac{2\pi}{\Delta n k_0}$ では、$\left(A_x, A_y e^{i2\pi}\right)e^{in_x k_0 z} = \left(A_x, A_y\right)e^{in_x k_0 z}$ ：右斜め直線偏波

液晶ディスプレイ

液晶ディスプレイは、偏波を利用して光をオン・オフしている。
液晶セルは、
通常時:高分子がランダムな方向を向いており等方的
電界印加時:分子の方向が揃い複屈折性
この両側に偏光板を直交配置すると
無電界時:光は透過せず(オフ)
電界印加時:液晶セルで直線偏波の方向が回転して光は透過(オン)



(特定の方向の直線偏波光だけを透過させる光学素子)

光の強度

これまで、電場で光を記述してきたが、実際に観測されるのはエネルギー。
そこで本節では、電場とエネルギーの関係について述べる。

光のエネルギー流はポインティングベクトル**S**で表わされる。

$$\boxed{\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}}$$

このベクトルの方向がエネルギーが流れる方向を示す。

光は横波なので、

- **E**及び**H**は伝播方向と垂直な方向に振動
- **E**と**H**は直交

z 方向伝播平面波でいうと、次式ということ。

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

但し、$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}) = E_x H_x + E_y H_y = 0$

よって、

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \begin{pmatrix} E_y H_z - E_z H_y \\ E_z H_x - E_x H_z \\ E_x H_y - E_y H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_x H_y - E_y H_x \end{pmatrix}$$

エネルギー流はz方向、つまり、

エネルギー流の方向＝光電場振動の伝播方向

次にベクトルの大きさについて。

$$|\mathbf{S}| = E_x H_y - E_y H_x$$

（註：ベクトルの大きさと複素数の絶対値を混同しないこと）

Maxwell方程式より、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \longrightarrow ik\begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} = i\omega\mu\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{k}{\omega\mu} E_y = H_x \\ \dfrac{k}{\omega\mu} E_x = H_y \end{cases}$$

代入

$$|\mathbf{S}| = E_x H_y - E_y H_x = \frac{k}{\omega\mu}(E_x{}^2 + E_y{}^2) = \frac{k}{\omega\mu}|\mathbf{E}|^2 = nc\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2$$

$$\left(k = \frac{\omega}{v} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \right)$$

光電場 **E** は振動しているので、ポインティングベクトルの大きさも時間的に振動。
が、その振動数は非常に高いため、検出できるのは時間平均。

$$<|\mathbf{S}|> = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} < |\mathbf{E}|^2 >$$

（< >は平均の意）

ここで、光電場ベクトルを次式のように表す。

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A_x \cos(\omega t + \theta_x) \\ A_y \cos(\omega t + \theta_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

（実数表示）

すると、

$$< |\mathbf{S}| >= \sqrt{\varepsilon/\mu}\{< A_x^2\cos^2(\omega t+\theta_x) + A_y^2\cos^2(\omega t+\theta_y) >\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon/\mu}\,(A_x^2 + A_y^2)$$

ところで複素表示では、

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{i(\omega t+\theta_x)} \\ A_y e^{i(\omega t+\theta_y)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

（註：複素表示の実数部＝実数表示）

上式より、$A_x^2 = \tilde{A}_x \times \tilde{A}_x^* = |\tilde{A}_x|^2$　$A_y^2 = \tilde{A}_y \times \tilde{A}_y^* = |\tilde{A}_y|^2$　（註：*は複素共役の意）

よって、ポインティングベクトルの大きさの時間平均は、複素表示により次のように表される。

$$< |\mathbf{S}| >= \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon/\mu}\{|\tilde{A}_x|^2 + |\tilde{A}_y|^2\}$$

これが、検出される光のエネルギー＝光の強度 I（但し、単位断面積あたり）

光強度： $I = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon/\mu}\{|\tilde{A}_x|^2 + |\tilde{A}_y|^2\}$

第１項はx振動成分、第２項はy振動成分。

このことは、
「全光強度はx成分の光強度 I_x とy成分の光強度 I_y の足し合わせ」
であることを示している。

$$I = I_x + I_y \qquad \left(I_x = \frac{\sqrt{\varepsilon/\mu}}{2}|\tilde{A}_x|^2 \qquad I_y = \frac{\sqrt{\varepsilon/\mu}}{2}|\tilde{A}_y|^2 \right)$$

通常、光強度を考える際には相対的な振る舞い（強弱）が関心事であり絶対値を問題としない。

なので、係数 $(1/2)\sqrt{\varepsilon/\mu}$はどうでもよい。そこで、

$$I_x = |\tilde{A}_x|^2 \qquad I_y = |\tilde{A}_y|^2$$

とするのが一般的。本講義でも、以降、この定義を用いる。すなわち、

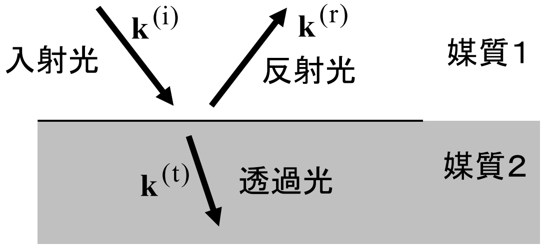
（光強度）＝（複素振幅の絶対値二乗）

なお以上では、説明の便宜上、実数表示Aと複素表示$\tilde{A}$を使い分けたが、
通常はAを複素振幅として用いる。その場合は、

$$I = |A|^2$$

反射・屈折

異なる媒質の境界面に平面光波が入射されるとする。境界面では一部反射、残りが透過。
本節では、この反射・透過について考える。



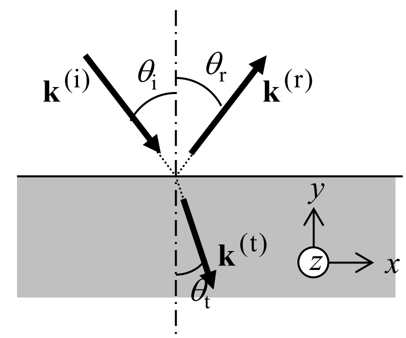
$$
\begin{cases}
\text{入射光}: A_{\mathrm{i}} \exp[i(\mathbf{k}^{(\mathrm{i})} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\
\text{反射光}: A_{\mathrm{r}} \exp[i(\mathbf{k}^{(\mathrm{r})} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\
\text{透過光}: A_{\mathrm{t}} \exp[i(\mathbf{k}^{(\mathrm{t})} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]
\end{cases}
$$

境界面では入射波/反射波/透過波の振動は連続的であるはず（境界条件）。よって、

$$\mathbf{k}^{(\mathrm{i})} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}^{(\mathrm{r})} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}^{(\mathrm{t})} \cdot \mathbf{r} \qquad \text{@境界面}$$

入射方向がx-y平面上であるように座標を設定し、境界面を $y = 0$ とすると、

$$k_x^{(\mathrm{i})} x = k_x^{(\mathrm{r})} x = k_x^{(\mathrm{t})} x$$



これが境界面上の全ての点で成り立つためには、

$$k_x^{(\mathrm{i})} = k_x^{(\mathrm{r})} = k_x^{(\mathrm{t})}$$

各光波が境界面の法線となす角をθ_{i}、θ_{r}、θ_{t} とすると、

$$\left|\mathbf{k}^{(\mathrm{i})}\right| \sin\theta_{\mathrm{i}} = \left|\mathbf{k}^{(\mathrm{r})}\right| \sin\theta_{\mathrm{r}} = \left|\mathbf{k}^{(\mathrm{t})}\right| \sin\theta_{\mathrm{t}}$$

$$n_1 k_0 \sin\theta_{\mathrm{i}} = n_1 k_0 \sin\theta_{\mathrm{r}} = n_2 k_0 \sin\theta_{\mathrm{t}}$$

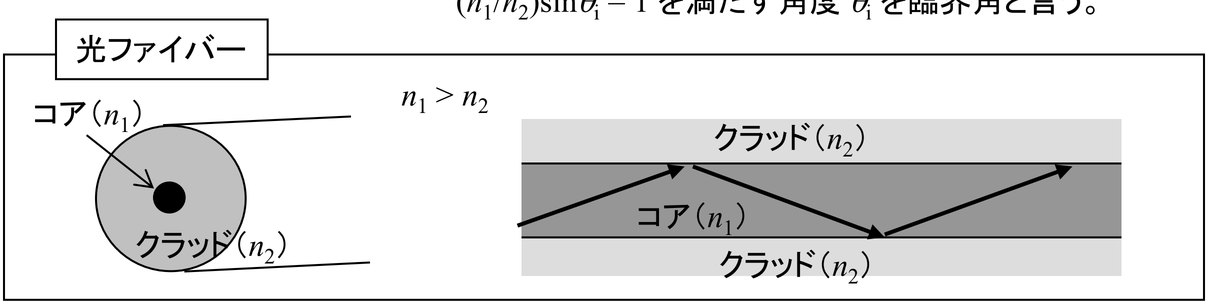
$$n_1 \sin\theta_{\mathrm{i}} = n_1 \sin\theta_{\mathrm{r}} = n_2 \sin\theta_{\mathrm{t}}$$

k_0 :真空中の伝播定数
n_1 :媒質1の屈折率
n_2 :媒質2の屈折率

よって、 $\theta_{\mathrm{i}} = \theta_{\mathrm{r}}$ 　　$\dfrac{\sin\theta_{\mathrm{i}}}{\sin\theta_{\mathrm{t}}} = \dfrac{n_2}{n_1}$ 　　**スネルの法則**

書き換えると、$\sin\theta_{\mathrm{t}} = \dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_{\mathrm{i}}$ ⟵ $(n_1/n_2)\sin\theta_{\mathrm{i}} > 1$ だと透過波は存在し得ない。 **全反射**

$(n_1/n_2)\sin\theta_{\mathrm{i}} = 1$ を満たす角度 θ_{i} を臨界角と言う。



次に、反射光・透過光の振幅について。
まず、各振幅を次のように表記。

$$\text{入射光電磁場}:\begin{Bmatrix}\mathbf{E}_\mathrm{i}\\ \mathbf{H}_\mathrm{i}\end{Bmatrix}\qquad \text{反射光電磁場}:\begin{Bmatrix}\mathbf{E}_\mathrm{r}\\ \mathbf{H}_\mathrm{r}\end{Bmatrix}\qquad \text{透過光電磁場}:\begin{Bmatrix}\mathbf{E}_\mathrm{t}\\ \mathbf{H}_\mathrm{t}\end{Bmatrix}$$

Maxwell方程式より、

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{\mu\omega}\mathbf{k}^{(i)}\times\mathbf{E}_\mathrm{i} \qquad \mathbf{H}_\mathrm{r} = \frac{1}{\mu\omega}\mathbf{k}^{(\mathrm{r})}\times\mathbf{E}_\mathrm{r} \qquad \mathbf{H}_\mathrm{t} = \frac{1}{\mu\omega}\mathbf{k}^{(\mathrm{t})}\times\mathbf{E}_\mathrm{t}$$

（光の場合、$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 = 1$）

ここで、2つの場合について考える。
（1）電場ベクトルが境界面に平行な場合：TE波（Transverse Electric wave）
（2）磁場ベクトルが境界面に平行な場合：TM波（Transverse Magnetic wave）

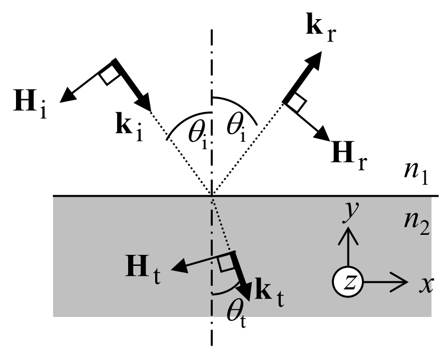
境界条件：電場、磁場の境界面に平行な成分は連続

TE波（電場の向きは $+z$ とする）

$$\begin{cases}\text{電場連続条件}: E_\mathrm{i} + E_\mathrm{r} = E_\mathrm{t}\\ \text{磁場連続条件}: -H_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i} + H_\mathrm{r}\cos\theta_\mathrm{i} = -H_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{t} \rightarrow -k_\mathrm{i}E_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i} + k_\mathrm{r}E_\mathrm{r}\cos\theta_\mathrm{i} = -k_\mathrm{t}E_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{r}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{i}} = \dfrac{n_1\cos\theta_\mathrm{i} - n_2\cos\theta_\mathrm{t}}{n_2\cos\theta_\mathrm{t} + n_1\cos\theta_\mathrm{i}} = \dfrac{n_1\cos\theta_\mathrm{i} - n_2\cos\theta_\mathrm{t}}{n_1\cos\theta_\mathrm{i} + n_2\cos\theta_\mathrm{t}}\\[2ex] \dfrac{E_\mathrm{t}}{E_\mathrm{i}} = \dfrac{2n_1\cos\theta_\mathrm{i}}{n_1\cos\theta_\mathrm{i} + n_2\cos\theta_\mathrm{t}}\end{cases}$$



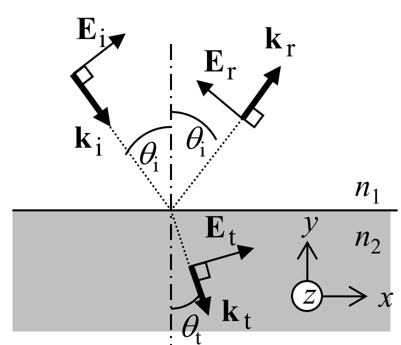
（z 軸 は手前側が＋）

TM波（電場の向きは右図とする）

$$\begin{cases}\text{電場連続条件}: E_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{i} - E_\mathrm{r}\cos\theta_\mathrm{i} = E_\mathrm{t}\cos\theta_\mathrm{t}\\ \text{磁場連続条件}: H_\mathrm{i} + H_\mathrm{r} = H_\mathrm{t} \rightarrow k_\mathrm{i}E_\mathrm{i} + k_\mathrm{r}E_\mathrm{r} = k_\mathrm{t}E_\mathrm{t}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{i}} = \frac{n_2\cos\theta_\mathrm{i} - n_1\cos\theta_\mathrm{t}}{n_1\cos\theta_\mathrm{t} + n_2\cos\theta_\mathrm{i}}$$



すなわち、屈折率の異なる媒質の境界面に光が入射すると反射が起こる。
垂直入射の場合、

$$\left|\frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{i}}\right| = \frac{|n_1 - n_2|}{n_1 + n_2}$$

フレネル反射

なお、$E_\mathrm{r}/E_\mathrm{i} < 0$ の場合は、複素振幅の位相がπシフトすることを意味する。　（$e^{i\pi} = -1$）
このことは、反射光が絡む干渉現象を考える際に重要となる。

エバネッセント波

前々ページ下段で、入射角が臨界角以上だと、全反射となることを述べた。
但しこれは、透過光は存在しないということであり、微小には光のエネルギーの一部は相手側の媒質内に浸み出している。これをエバネッセント波と言う。

境界面での連続条件より

$$k_x^{(\mathrm{t})} = k_x^{(\mathrm{i})} = \frac{n_1\omega}{c}\sin\theta_\mathrm{i}$$

一方、TE波の場合、透過光の伝播定数に関して、

$$\{k_x^{(\mathrm{t})}\}^2 + \{k_y^{(\mathrm{t})}\}^2 = \left|\mathbf{k}^{(\mathrm{t})}\right|^2 = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 \longrightarrow \{k_y^{(\mathrm{t})}\}^2 = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 - \{k_x^{(\mathrm{t})}\}^2$$

境界条件を代入すると、

$$\{k_y^{(\mathrm{t})}\}^2 = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 \sin^2\theta_\mathrm{i} = \frac{\omega^2}{c^2}\{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_\mathrm{i}\}$$

全反射の状態では、

$$\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_\mathrm{i} > 1 \longrightarrow \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_\mathrm{i} > 1 \longrightarrow n_1^2\sin^2\theta_\mathrm{i} > n_2^2 \longrightarrow n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_\mathrm{i} < 0$$

よって、

$$\{k_y^{(\mathrm{t})}\}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_\mathrm{i}\} < 0 \longrightarrow k_y^{(\mathrm{t})}\text{は虚数}$$

伝播定数が虚数ということは、その方向に減衰する波であることを意味する。

$E = A\exp[i(k_y y - \omega t)]$において、$k_y = i\alpha$（α は実数）とすると、

$$|E|^2 = \left|A\exp[i(i\alpha y - \omega t)]\right|^2 = \left|Ae^{-\alpha y}e^{-i\omega t}\right|^2 = |A|^2 e^{-2\alpha y}$$

光強度が $1/e$ に減衰する深さ y_0 は、

$$e^{-2\alpha y_0} = e^{-1} \longrightarrow y_0 = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2|k_y|} = \frac{c}{2\omega\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_\mathrm{i} - n_2^2}}$$

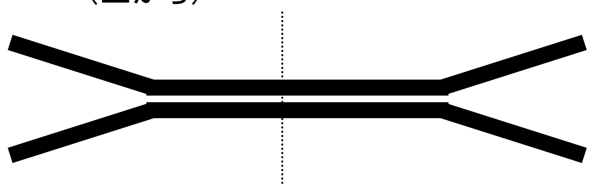
言い方を変えると、全反射状態であっても、y_0 程度は媒質内に光が入り込んでいる。

エバネッセント波

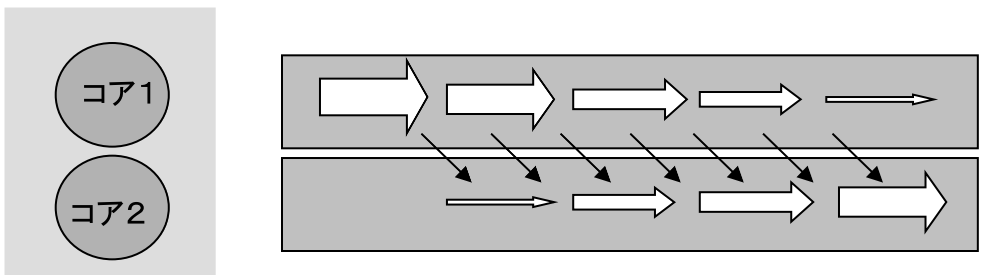
方向性結合器（光カップラ）

エバネッセント現象を利用して光を分岐・結合

（上から）



（断面）



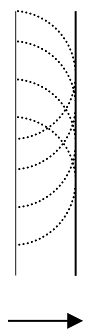
ホイヘンス(Huyhens)の原理

これまでは、Maxwell方程式を基礎に光の伝播、透過、反射などについて述べてきた。これらの特性は、ホイヘンスの原理によっても説明可能である。場合によっては、こちらの方が考えやすいことがある。

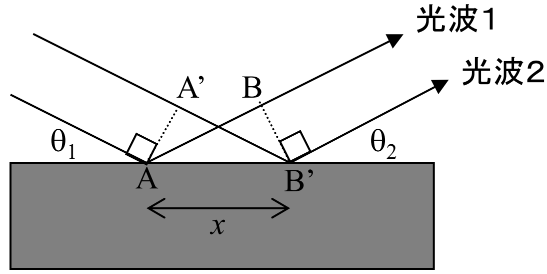
ホイヘンスの原理

波動は、ある波面(等位相面)上の各点が新たな点源となって波を放射し、放射された各波の包絡線が2次波面(等位相面)を形成する。

平面波



反射



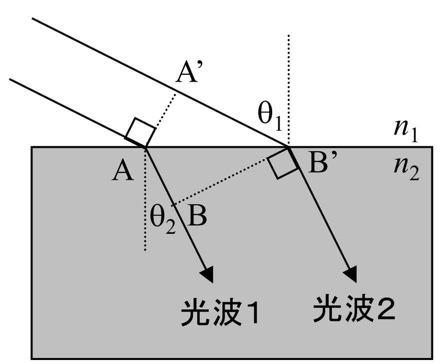
光波1、2はそれぞれA点、B'点で2次光波を放射する。
入射光の等位相面はA-A'、反射光の等位相面はB-B'とする。
B-B'が等位相面となるためには、光波1はA点からB点へ進むまでの伝播位相と、光波2がA'点からB'点へ進むまでの伝播位相が等しければよい。
つまり、

A-B間距離＝A'-B'間距離

↓

$$x\cos\theta_1 = x\cos\theta_2 \longrightarrow \theta_1 = \theta_2$$

屈折



B-B'が等位相面となるためには、A-B間伝播位相＝A'-B'間伝播位相。

↓

$$n_2 k_0 \overline{\mathrm{AB}} = n_1 k_0 \overline{\mathrm{A'B'}}$$

↓

$$n_2 k_0 \overline{\mathrm{AB'}} \sin\theta_2 = n_1 k_0 \overline{\mathrm{AB'}} \sin\theta_1$$

↓

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$$

スネルの法則

演習問題

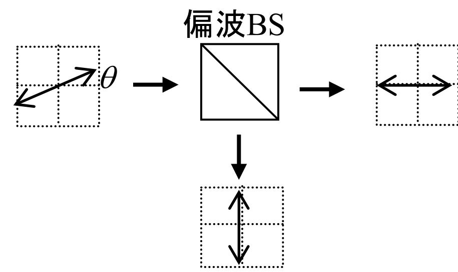
[1.1] 周波数 f_0 の光と周波数 $f_0 + \Delta f$ の光の波長差 $\Delta\lambda$ を、f_0 と光速 c を含む Δf の一次関数として表わせ。ただし、$f_0 >> \Delta f$ とする。

[1.2] $E = A\sin(kz - \omega t + \theta)$ にしたがって z 方向に伝播する平面波がある（t: 時間、その他は定数）。

(a) これを複素表示せよ。

(b) この光の強度を表せ。

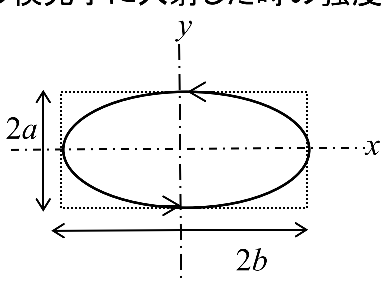
[1.3] 偏波ビームスプリッタは、横直線偏波成分を透過／縦直線偏波成分を反射させる光学素子である。これに対し、横軸からの傾き角が θ である直線偏波光を入力した。透過光と反射光の強度比を θ で表せ。

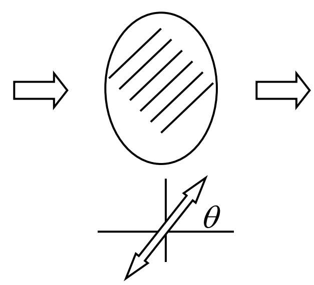


[1.4] 進行方向に対し垂直な xy 平面上で、下左図のように、長辺と短辺の長さの比が $b:a$ である長方形に接する楕円に沿って反時計廻りで振動しながら伝播する強度 I の平面波がある。

(a) この光の偏波状態を2次元ベクトルで表せ。但し、光強度＝|複素振幅|^2 としてよい。

(b) 検光子は特定方向（角度 θ）の直線偏波成分のみを透過させる光学素子である（下右図）。上記の光をこの検光子に入射した時の強度透過率を表せ。





[1.5] 長さ L の複屈性媒質（横振動屈折率＝n_x、縦振動屈折率＝n_y）に対し、{強度 I_0、波長 λ }の光を傾き角 ϕ の直線偏波状態で入力し、出力側で左斜め45度直線偏波成分を透過させる検光子に通した。

(a) 入力光電場（@ $z = 0$）を二次元ベクトルで表せ。

(b) 結晶出力端（@ $z = L$）での光電場を表せ。

(c) 検光子からの出力光強度を表せ。