

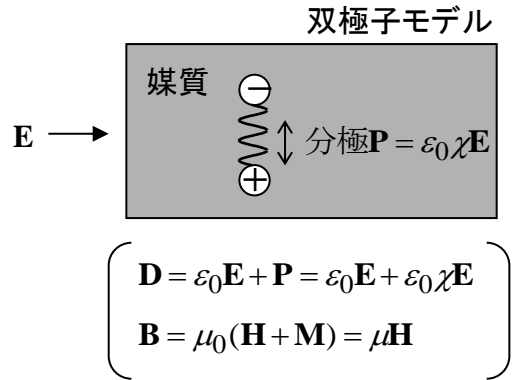
III. 結晶光学

本章では、物質内の光の振る舞いを詳しく述べる。
 屈折率や吸収が発生するメカニズム、複屈折の詳細、など。
 さらに、それらを利用した光デバイスについても触れる。

媒質中のMaxwell 方程式 (非磁性かつ電氣的に中性な媒質を想定: 誘電体)

誘電体媒質内では、電子は原子に束縛されており、電流はゼロ。 $\mathbf{J} = 0$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \\ &\Downarrow \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad \left[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \right] \\ &\Downarrow \\ \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad \text{または、} \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \quad \left[c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \approx \frac{1}{\epsilon_0 \mu} \right] \end{aligned}$$

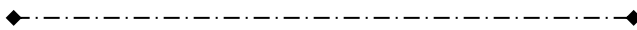
媒質伝搬特性は分極Pに依存。そこで、分極の発生及びその伝搬特性への影響について詳細にみてる。

等方的誘電体の場合 - 屈折率、分散、吸収について -

光電場振動に駆動された束縛電子の振動(双極子振動)から分極が生じ、分極から屈折率・吸収という現象が現れる。

光電場入力 → 双極子振動 → 分極 → 屈折率・吸収

この過程を式を使って辿ってみる。



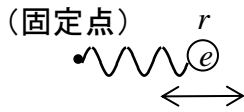
まず、電子振動と分極Pとの関係は、

$$P = -Ner$$

(ただし、簡単のため1次元で考察)

$$\left(\begin{array}{l} N: \text{電子密度} \\ e: \text{電荷} \\ r: \text{電子の平衡点からのずれを示す位置座標} \end{array} \right)$$

光電場が入射されたときの r の挙動をニュートンの運動方程式から解き出す。
 考察するのは束縛された電子の振動。これを固定点に繋がれた質点のばね振動でモデル化する。



$$m \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \underbrace{-Kr}_{\text{復元力}} - \underbrace{eE}_{\text{光電場による駆動力}} - \underbrace{m\gamma \frac{\partial r}{\partial t}}_{\text{抑制力}}$$

加速度

$$\left(\begin{array}{l} m: \text{電子の質量} \\ K: \text{定数(ばね定数に相当)} \\ E: \text{光電場} \\ \gamma: \text{抑制係数(摩擦力)} \\ \quad \text{(ガンマ)} \end{array} \right)$$

振動の駆動力は光電場 E 。ここで、 E は角周波数 ω の単一周波数光とする。

すると、 r も ω で振動するであろう。そこで、

$$r \propto e^{-i\omega t} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial t} = -i\omega r \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\omega^2 r$$

これを運動方程式に代入

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K)r &= -eE \quad \longrightarrow \quad r = -\frac{e}{-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K} E \\ &= -\frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} E = -\frac{e}{m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} E \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し } \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{と置き換え。} \\ \omega_0 \text{ は自由振動時(次式)の角周波数に対応} = \text{固有角振動数} \\ m \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -Kr \quad \longrightarrow \quad r \propto e^{-i\omega_0 t} \end{array} \right)$$

この r を分極の表式に代入

$$P = -Ner = \frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} E$$

(第1章ではこれを受感率 $\epsilon_0\chi$ とした。)

上式によれば、感受率 χ は複素数: $\chi = \chi_r + i\chi_i$ 。

$$\text{実数部: } \chi_r = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \quad \text{虚数部: } \chi_i = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}$$

$$\left(|\omega - \omega_0| \gg 0 \text{ だと } \chi_i \rightarrow 0 \right)$$

さらに上式によれば、感受率 χ は入射光周波数に依存

第1章では感受率 χ を実数とし、 $P = \epsilon_0\chi E$ を伝播方程式に代入し、これから屈折率を導いた。

χ が複素数としてこれを再検討する。

伝搬方程式(ただし一次元)の χ を複素数として、次式のように表記。

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1+\chi}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1+\chi_r+i\chi_i}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

第1章より、この解は z 方向へ伝播する角周波数 ω の平面波。但し、 χ_i が加わった効果を考慮して、振幅は z に依存、とする。

$$E(z) = A(z) \exp[i(kz - \omega t)] \quad (A, k \text{ は実数})$$

これを伝搬方程式に代入。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} A(z) e^{i(kz - \omega t)} &= \frac{1+\chi_r+i\chi_i}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(z) e^{i(kz - \omega t)} \\ \left\{ \frac{d^2 A}{dz^2} + 2ik \frac{dA}{dz} - k^2 A \right\} e^{i(kz - \omega t)} &= -\frac{\omega^2 (1+\chi_r+i\chi_i)}{c^2} A e^{i(kz - \omega t)} \\ \frac{d}{dz} \left\{ \frac{dA}{dz} + 2ikA \right\} - k^2 A &= -\frac{\omega^2 (1+\chi_r+i\chi_i)}{c^2} A \end{aligned}$$

ここで、左辺の第1項と第2項の大きさを比較する。

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} &\quad \text{vs} \quad 2ikA \\ \frac{1}{k} \frac{dA}{dz} &\quad \text{vs} \quad 2iA \\ \frac{\lambda}{2\pi n} \frac{dA}{dz} &\quad \text{vs} \quad 2iA \end{aligned} \quad \left(k = n \frac{2\pi}{\lambda} \right) \quad \left(\begin{array}{l} n: \text{屈折率} \\ \lambda: \text{波長} \end{array} \right)$$

左側は概ね波長オーダー距離の振幅 A の変化分。右側は振幅 A 。
光波の波長は波長程度の伝搬距離ではほぼ一定と考えてよいので、

$$\left(dY = \frac{dY}{dx} dx \right)$$

$$\frac{dA}{dz} \ll 2ikA$$

そこで、微分方程式の左辺第1項は無視する。

$$2ik \frac{dA}{dz} - k^2 A = -\frac{\omega^2 (1+\chi_r+i\chi_i)}{c^2} A$$

slowly varying 近似

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{実数部: } k^2 A = \frac{\omega^2 (1+\chi_r)}{c^2} A \longrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1+\chi_r) \longrightarrow k = k_0 \sqrt{1+\chi_r} \\ \text{虚数部: } 2k \frac{dA}{dz} = -\frac{\omega^2 \chi_i}{c^2} A \longrightarrow 2 \frac{\omega}{c} \sqrt{1+\chi_r} \frac{dA}{dz} = -\frac{\omega^2 \chi_i}{c^2} A \longrightarrow \frac{dA}{dz} = -\frac{\omega \chi_i}{2c \sqrt{1+\chi_r}} A \end{array} \right. & \quad \begin{array}{l} \text{屈折率 } n \\ \text{真空中伝搬定数} \end{array} \\ & \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c} \right) \\ & \quad \longrightarrow A \propto \exp \left[-\frac{\omega \chi_i}{2c \sqrt{1+\chi_r}} z \right] \end{aligned}$$

上記より、微分方程式の解は、

$$E(z) = A(z) \exp[i(kz - \omega t)] \propto e^{-(\alpha/2)z} \times e^{i(nk_0 z - \omega t)}$$

$$\left(\begin{array}{l} n \equiv \sqrt{1 + \chi_r(\omega)} \\ \alpha \equiv \frac{\omega \chi_i(\omega)}{c \sqrt{1 + \chi_r(\omega)}} \end{array} \right)$$

n は屈折率、 α は吸収係数、に対応。

$$\left[\text{光強度 } I(z) = |E(z)|^2 \propto e^{-\alpha z} \right]$$

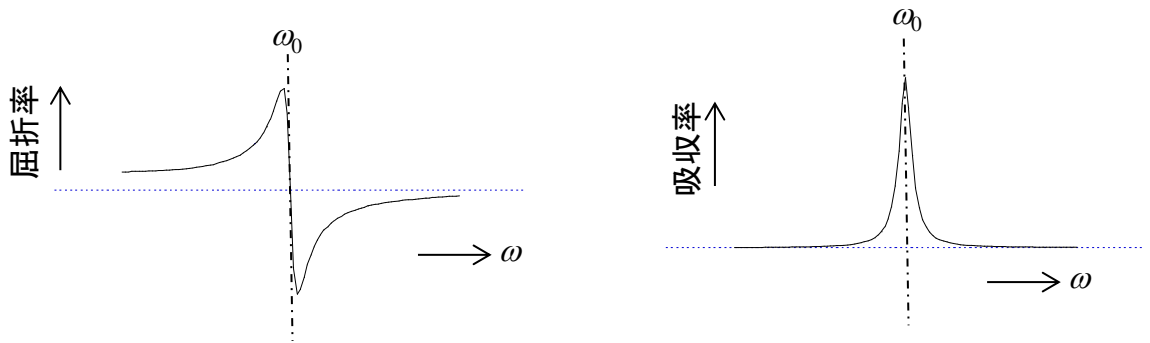
つまり、

感受率の実数部	⇒	屈折率
虚数部	⇒	吸収係数

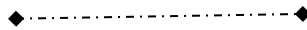
さらに、感受率は光周波数に依存するので、

屈折率・吸収率は光周波数(=波長)に依存

媒質の固有振動数 ω_0 で特異点



屈折率が波長によって異なる性質を**波長分散**(または色分散、または単に分散)と呼ぶ。
雨上がりに虹が見えるのはこれが原因。



ちなみに、感受率の虚数部が吸収現象となることは直観的に次のように理解される。

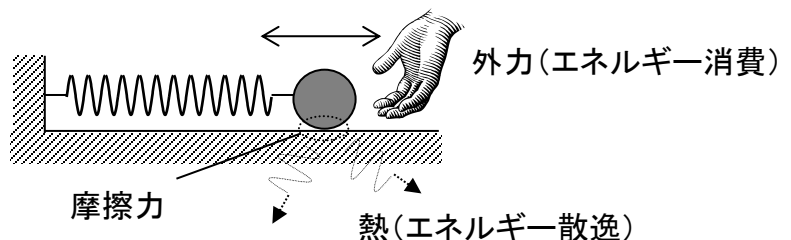
感受率の虚数部は元の運動方程式の抵抗力(摩擦抵抗)が起源。

抵抗力はエネルギーを散逸させる。

ここで、双極子振動の駆動力は入射光電場。

つまり、入射光は抵抗力を介してエネルギーを失いながら伝播する。

つまり、吸収。



なお、以上では固有周波数はひとつだけとしたが、実際の媒質では複数種類の双極子があり、固有振動数も複数存在する。そのため、実際の吸収・屈折率は、複数の固有振動からの寄与の足し合わせ。

$$\alpha = \frac{1}{nc} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \longrightarrow \frac{1}{nc} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \cdot \sum_j a_j \frac{\gamma_j\omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j\omega)^2}$$

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad \left(f(x_0 + \delta) \approx f(x_0) + f'(x_0)\delta \right)$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \longrightarrow 1 + \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j a_j \frac{(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_j\omega)^2}$$

(a_j : 各共鳴振動からの寄与の割合を表わす定数)

逆に、吸収率の波長依存性(吸収スペクトル)から媒質の様子を知ることができる。

吸収分光(物性探索)やセンサー・計測器への応用

複屈折

光には偏波という属性がある(第1章参照)。

結晶によっては、偏波状態によって光が感じる屈折率が異なる。これを複屈折という。

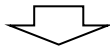
これを利用すると、光の偏波状態を制御することができる(e.g., 液晶パネル)。

本節では、複屈折について、結晶光学の立場から述べる。

複屈折の源は媒質の非等方性。

双極子モデルにおいて、

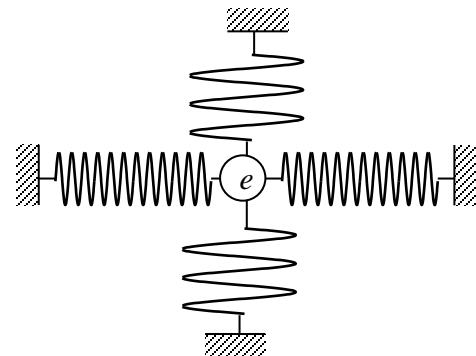
一般に電子の束縛力(ばね定数)は方向によって異なる。



誘起される分極が入射光電場の振動方向(偏波状態)に依存



複屈折



以下、どのような偏波状態に対してどのような屈折率となるか、を式を使って記述する。

屈折率の源は、光電場により誘起される分極。

一般に、電場ベクトルと分極ベクトルは、 3×3 の行列(感受率テンソル)によって関係付けられる。

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \epsilon_0: \text{真空中の誘電率} \\ \chi: \text{感受率} \end{array} \right)$$

各 χ が実数の場合、座標系を適切に選ぶと、対角成分のみとすることができる(行列の対角化)。

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \bar{\chi} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \bar{\chi} \text{ はテンソルの意。} \\ \text{但し、ここだけの表記法。} \end{array} \right)$$

このような座標軸(X, Y, Z)をその結晶の主軸という。(双極子の方向に相当)

以下、主軸座標系を前提として座標は小文字で表記。

媒質中の伝搬方程式を3次元空間で表すと、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = -\mu \epsilon_0 \bar{\chi} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \bar{\chi} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

これに平面波の表式 $\mathbf{E} \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ を代入して微分を実行すると、

$$\begin{cases} (-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x \\ k_x k_y E_x + (-k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_y + k_y k_z E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} E_y \\ k_x k_z E_x + k_y k_z E_y + (-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \\ \mathbf{r} = (x, y, z) \end{array} \right)$$

この連立方程式の解から電場ベクトル \mathbf{E} と伝搬ベクトル \mathbf{k} が関係付けられる。

ここで、伝搬ベクトルの{方向は光の伝搬方向、大きさは空間周期=媒質内波長=屈折率}を表す。



{伝搬方向、電場の振動方向(偏波状態)、屈折率}の関係を記述

例えば、 x 方向への伝搬光については、 $k_y = k_z = 0$ なので、

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x \quad \longrightarrow \quad E_x = 0 & \text{伝搬方向の電場振動} = 0 \text{ (横波)} \\ (-k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) E_y = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} E_y \quad \longrightarrow \quad k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{22}} & y \text{方向光電場振動の屈折率} = \sqrt{1 + \chi_{22}} \\ (-k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \quad \longrightarrow \quad k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{33}} & z \text{方向光電場振動の屈折率} = \sqrt{1 + \chi_{33}} \end{cases}$$

$$\left(k = \frac{n\omega}{c} \right)$$

このように、主軸方向へ伝搬する光が感じる屈折率はわりと簡単。
が、一般の方向へ伝搬する光についてはそうはいかない。

まず、前記連立方程式が有意な解 (E_x, E_y, E_z が 0 でない解) をもつための条件式 (特性方程式) は、

$$\begin{vmatrix} (n_1\omega/c)^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & (n_2\omega/c)^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & (n_3\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0$$

但し、 $n_1 \equiv \sqrt{1 + \chi_{11}}$

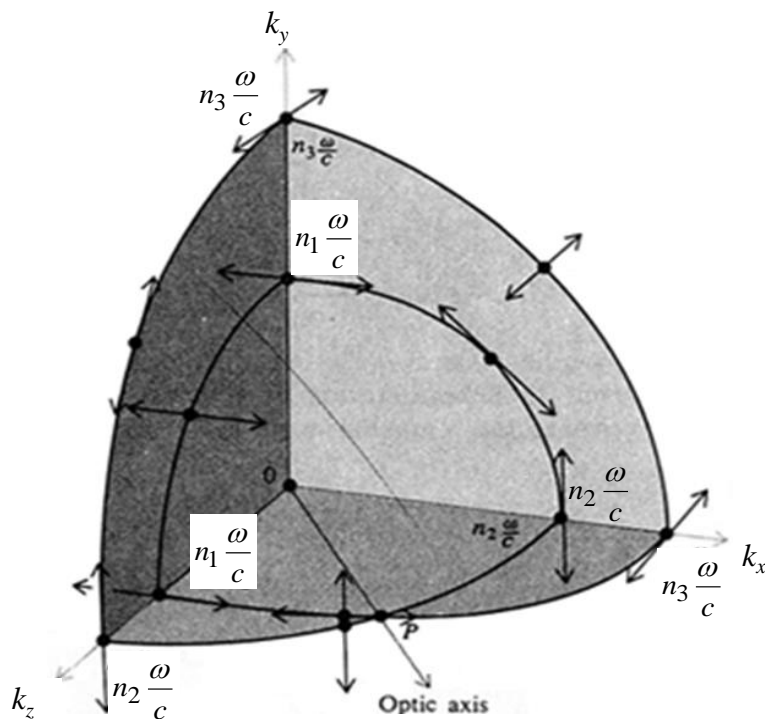
$n_2 \equiv \sqrt{1 + \chi_{22}}$

$n_3 \equiv \sqrt{1 + \chi_{33}}$

(特性方程式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

この特性方程式の解を図示すると、



これにより、任意の方向へ伝搬する光が感じる屈折率が表される。

解が二重になるのは、次の考察より覗える。

例えば、 $k_z = 0$ の場合 ((k_x, k_y) 平面上が光の進行方向)

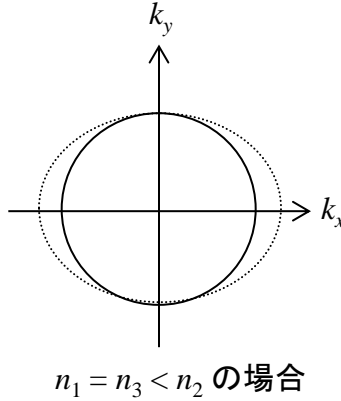
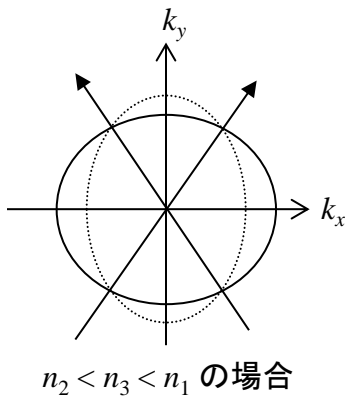
$$\left\{ (n_3\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 \right\} \left\{ (n_1\omega/c)^2 - k_y^2 \right\} \left\{ (n_2\omega/c)^2 - k_x^2 \right\} - k_x^2 k_y^2 = 0$$

この解は2通り。

$$\textcircled{1} (n_3\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 = 0 \longrightarrow k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{n_3\omega}{c} \right)^2 \quad \text{円形}$$

$$\textcircled{2} \left\{ (n_1\omega/c)^2 - k_y^2 \right\} \left\{ (n_2\omega/c)^2 - k_x^2 \right\} - k_x^2 k_y^2 = 0 \longrightarrow \frac{k_x^2}{(n_2\omega/c)^2} + \frac{k_y^2}{(n_1\omega/c)^2} = 1 \quad \text{楕円形}$$

解を図示すると、

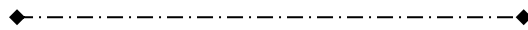


屈折率楕円体

一般には、ひとつの伝播方向に対して2組の解がある。→ 複屈折
但し、特定の方向では解はひとつ → 屈折率はひとつ

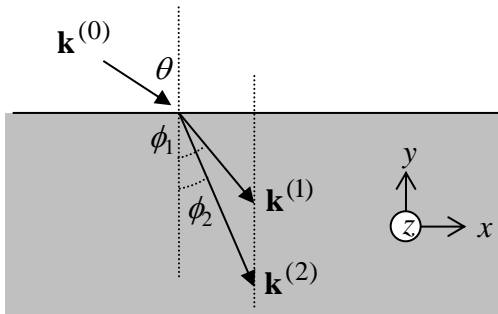
なお、屈折率がひとつとなる方向を光学軸という。

また、光学軸がふたつの結晶を2軸結晶、ひとつの結晶を1軸結晶という。



複屈折媒質を伝播する光に関して、常光線/異常光線、という言い方がしばしば使われる。
これについて説明する。

平面波が空気中から複屈折結晶に入射したとする。



境界面では次式が成り立つ。

$$\mathbf{k}^{(0)} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}^{(1,2)} \cdot \mathbf{r}$$

入射方向が x - y 平面上であるように座標を設定し、境界面を $y = 0$ とすると、

$$k_x^{(0)} x = k_x^{(1,2)} x \quad (\text{註: } z \text{ 成分はゼロ})$$

これが境界面の全ての点で成り立つためには、

$$k_x^{(0)} = k_x^{(1,2)} \longrightarrow \begin{cases} k^{(0)} \sin \theta = k^{(1)} \sin \phi_1 \\ k^{(0)} \sin \theta = k^{(2)} \sin \phi_2 \end{cases}$$

これは一見、スネルの法則。

がしかし、複屈折媒質では一般に k は方向すなわち屈折角に依存し、屈折角は k に依存する、という関係にあるため話は複雑。

但し、 k が方向に依らず一定である場合には、スネルの法則から単純に屈折角が決まる。

具体的には、1軸結晶 ($n_1 = n_2$) では k に関する二重曲面の一方は球であり、この成分光については k は方向に依らず一定。

そこで、

常光線

k (すなわち屈折率)が方向に依らず一定である光

異常光線

屈折率が方向に依って異なる光

と言う。

電気光学効果(ポッケルス効果)

これまでは、媒質内で誘起される電束 \mathbf{D} は電場 \mathbf{E} に比例し、その比例係数は定数(または定テンソル)としてきた。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \bar{\chi} \mathbf{E} = \bar{\varepsilon} \mathbf{E} \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 (\bar{I} + \bar{\chi})$$

この比例係数(誘電率) ε は、電界、磁界、応力などの外力によって変化する。

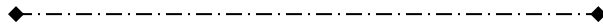
電界により変化 \Rightarrow 電気光学効果

磁界により変化 \Rightarrow 磁気光学効果

応力により変化 \Rightarrow 光弾性効果

電気光学効果にも、電界に線形に比例する効果(ポッケルス効果)と、電界の二乗に比例する効果(カー効果)がある。特に前者は光の変調に用いられ、光通信において広く利用されている。

本節ではポッケルス効果について述べる。



光の伝搬特性に対する媒質の効果は屈折率 n で表される。

$$\mathbf{E} \propto \exp[i(n\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (\mathbf{k}_0: \text{真空中の伝播ベクトル})$$

そこで、

電界印加 \rightarrow 誘電率変化 \rightarrow 屈折率変化

の様子を式で辿ってみる。

まず、誘電率変化。

外力が無い場合、座標系を結晶軸方向に選ぶと、感受率 χ は対角成分のみ。

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

これに伴い誘電率 ε も対角成分のみ。

$$\left(\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \right)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} &= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 + \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、パラメータを書き換える。慣例的に、外力による電束 \mathbf{D} と電場 \mathbf{E} との関係の変化を論じる時には、次で定義される逆誘電率 b が用いられる。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$$

要するに、 b は ε の逆行列。電場と電束を関係付けるということでは同じ意味合い。誘電率と同様に、外力が無い場合には、逆誘電率も対角要素のみ。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{xx}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & b_{yy}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & b_{zz}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$$

電界が加わると、各要素はそれに応じて変化する。この変化は一般的に次のように表される。

$$b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + r_{ijx} V_x + r_{ijy} V_y + r_{ijz} V_z \quad (i, j = x, y, z)$$

V_x : x方向印加電界 V_y : y方向印加電界 V_z : z方向印加電界 r : 比例係数	第1項: 無電界時 第2項: x方向電界による変化分 第3項: y方向電界による変化分 第4項: z方向電界による変化分
---	---

変化率を表す比例係数 r は3階のテンソル。但し、このままだと 3^3 個の要素があり煩雑。

ところで、媒質においては、 i 方向の光電場から j 方向の電束が誘起される物理過程と、 j 方向の光電場から i 方向の電束が誘起される物理過程は逆過程なので、 $b_{ij} = b_{ji}$ 。なので、 3^3 個もの要素は不要。そこで、9つある上記 ij を6つに集約して m と表記。

ij	xx	yy	zz	yz	zy	zx	xz	xy	yx
	↓	↓	↓	↓		↓		↓	
m	1	2	3	4	5	6			

$$b_m = b_m^{(0)} + r_{mx} V_x + r_{my} V_y + r_{mz} V_z$$

こうすると、 r は 6×3 の行列の形となる。

各行列要素は物質定数として詳しく調べられており、これを使うと電界印加による屈折率変化の様子が分かる。

例えば、光変調器によく使われる LiNbO_3 の場合、

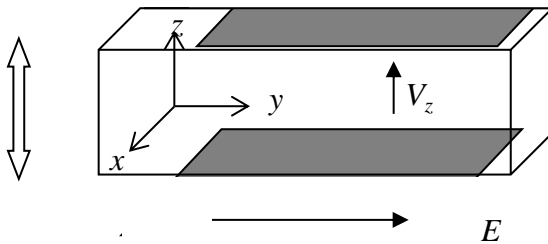
リチウムナイオベイト、または
ニオブ酸リチウム

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

添え字の2番目の数字は、
 $x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3$
の意。

以下、 LiNbO_3 を例にして、印加電界による屈折率の変化の様子をみる。

(i) 光の伝播方向は y 、入力偏波は z 方向直線偏波、印加電界は z 方向、の場合



$b_m = b_m^{(0)} + r_{m3}V_z$ であり、具体的に書き出すと、

$$\left\{ \begin{array}{llll} b_1 = b_1^{(0)} + r_{13}V_z & b_2 = b_2^{(0)} & b_3 = b_3^{(0)} + r_{33}V_z & b_4 = b_5 = b_6 = 0 \end{array} \right\}$$

↓ (元の形に解凍)

$$\left\{ \begin{array}{lll} b_{xx} = b_{xx}^{(0)} + r_{13}V_z & b_{yy} = b_{yy}^{(0)} & b_{zz} = b_{zz}^{(0)} + r_{33}V_z \end{array} \right\}$$

↓ (E, D の関係式に代入)

$$\cancel{E_x = (b_{xx}^{(0)} + r_{13}V_z)D_x} \quad \cancel{E_y = b_{yy}^{(0)}D_y} \quad E_z = (b_{zz}^{(0)} + r_{33}V_z)D_z \quad (\text{z偏波光なので})$$

ところで、屈折率 n を用いると、電束 D と光電場 E との関係式は、 $D = \epsilon_0 n^2 E$

上式と比べると、 z 振動成分についての屈折率 n_z が、

$$\epsilon_0 n_z^2 = \frac{1}{b_{zz}^{(0)} + r_{33}V_z} \quad \longrightarrow \quad n_z = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 (b_{zz}^{(0)} + r_{33}V_z)}}$$

となっている。ここで、

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 b_{zz}^{(0)}}} \equiv n_{z0} \quad \longrightarrow \quad b_{zz}^{(0)} = \frac{1}{\epsilon_0 n_{z0}^2}$$

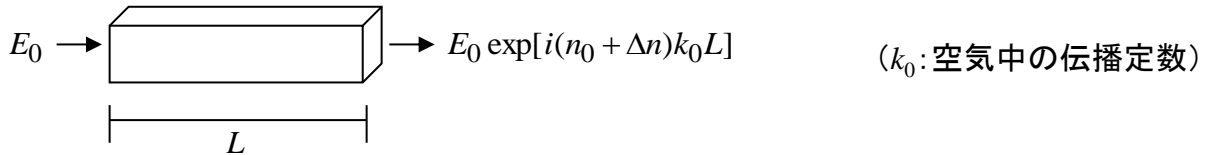
電界が印加されていない時の屈折率

$$n_z = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0(b_{zz}^{(0)} + r_{33}V_z)}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 b_{zz}^{(0)}}} \sqrt{\frac{1}{1 + (r_{33}V_z / b_{zz}^{(0)})}} \approx n_{z0} \left(1 - \frac{r_{33}V_z}{2b_{zz}^{(0)}}\right) = n_{z0} - \frac{\epsilon_0 n_{z0}^3}{2} r_{33}V_z$$

屈折率は印加電界に比例して変化

$$n_z = n_{z0} - kV_z$$

屈折率変化 → 媒質を通過する光の伝播位相が変化

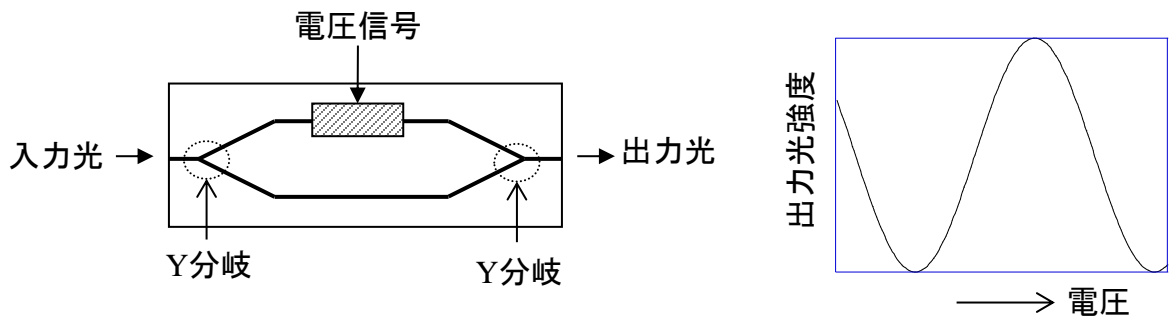


これを利用すると、電界印加により光の位相を変調可能。

光位相変調器

さらに、干渉計に組み込むと強度変調器になる。

マツハツェンダ強度変調器



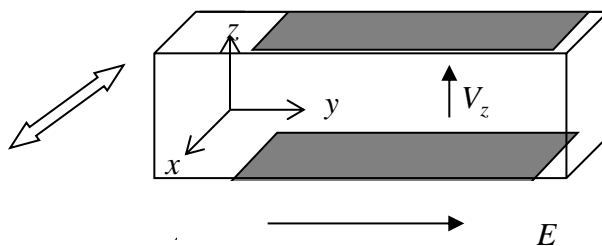
光導波路上で光を2分岐して再び合波。

2光路を経た光の位相差 ($k\Delta L$) に応じて、出力光強度はサイン状に変化。

一方の光路の屈折率を外部信号で変調すると、出力光強度が変調される。

(なお、出力側Y分岐では相補的な出力は非導波モードへ散乱される。)

(ii) 光の伝播方向は y 、入力偏波は x 方向直線偏波、印加電界は z 方向、の場合



$b_m = b_m^{(0)} + r_{m3}V_z$ であり、具体的に書き出すと、

$$\left\{ \begin{array}{llll} b_1 = b_1^{(0)} + r_{13}V_z & b_2 = b_2^{(0)} & b_3 = b_3^{(0)} + r_{33}V_z & b_4 = b_5 = b_6 = 0 \end{array} \right\}$$

↓ (元の形に解凍)

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{xx} = b_{xx}^{(0)} + r_{13}V_z \\ b_{yy} = b_{yy}^{(0)} \\ b_{zz} = b_{zz}^{(0)} + r_{33}V_z \end{array} \right\}$$

↓ (E, D の関係式に代入)

$$E_x = (b_{xx}^{(0)} + r_{13}V_z)D_x \quad \cancel{E_y = b_{yy}^{(0)}D_y} \quad \cancel{E_z = (b_{zz}^{(0)} + r_{33}V_z)D_z} \quad (\text{x偏波光なので})$$

ところで、屈折率 n を用いると、電束 D と光電場 E との関係式は、 $D = \epsilon_0 n^2 E$
 上式と比べると、 x 振動成分についての屈折率 n_x が次式となっている。

$$\epsilon_0 n_x^2 = \frac{1}{b_{xx}^{(0)} + r_{13}V_z} \quad \rightarrow \quad n_x = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 (b_{xx}^{(0)} + r_{13}V_z)}}$$

但し、 $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 b_{xx}^{(0)}}} \equiv n_{x0} \quad \rightarrow \quad b_{xx} = \frac{1}{\epsilon_0 n_{x0}^2}$ 電界が印加されていない時の屈折率

印加電界による変化分は小さいとして、前と同様に屈折率の式を展開すると、

$$n_x = n_{x0} - \frac{\epsilon_0 n_{x0}^3}{2} r_{13}V_z$$

屈折率変化は偏波方向によって異なる



光変調器へは特定の偏波状態で入力

(入力光の偏波制御が必要)

(iii) 同じく LiNbO₃ 結晶に対して、

光の伝播方向は y 、偏波は xz 方向斜め直線偏波、印加電界は z 方向、の場合

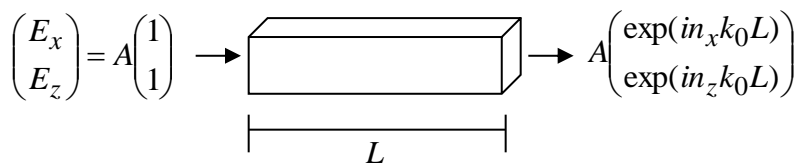
$$E_x = (b_{xx}^{(0)} + r_{13}V_z)D_x \quad \cancel{E_y = b_{yy}^{(0)}D_y} \quad E_z = (b_{zz}^{(0)} + r_{33}V_z)D_z$$

前と同様にして、

$$x \text{ 成分の屈折率: } n_x \approx n_{x0} - \frac{\epsilon_0 n_{x0}^3}{2} r_{13}V_z \quad z \text{ 成分の屈折率: } n_z \approx n_{z0} - \frac{\epsilon_0 n_{z0}^3}{2} r_{33}V_z$$

各成分の屈折率は印加電界に比例して変化。但し、変化量は異なる。

この媒質を光が通過すると、各成分はそれぞれの屈折率を感じる。



$$A \begin{pmatrix} \exp(in_x k_0 L) \\ \exp(in_z k_0 L) \end{pmatrix} = A \exp(in_x k_0 L) \begin{pmatrix} 1 \\ \exp[i(n_z - n_x)k_0 L] \end{pmatrix} = A e^{in_x k_0 L} \begin{pmatrix} 1 \\ \exp[i\Delta n k_0 L] \end{pmatrix}$$

但し、 $\Delta n = n_z - n_x = \Delta n_0 - \frac{\epsilon_0}{2} (n_{z0}^3 r_{33} - n_{x0}^3 r_{13}) V_z$

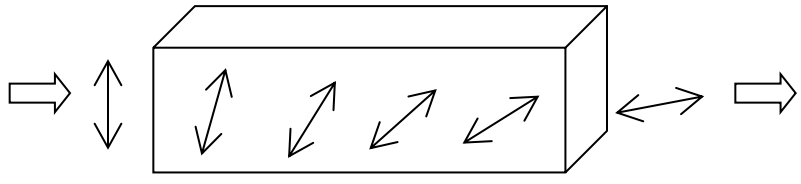
$n_{z0}^3 r_{33} - n_{x0}^3 r_{13} \neq 0$ なので、xz 成分の位相差が印加電界により変調される。

その結果、出力偏波状態が印加電界により変調される。⇒ 偏波変調器

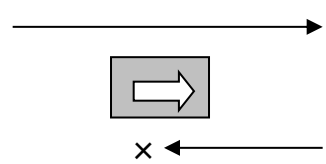
ファラデー効果

磁場が印加された等方的誘電体媒質に光を通すと偏波が回転する。

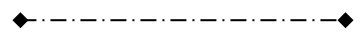
これをファラデー効果と言う。



ファラデー効果は、光通信では光アイソレータとして広く応用されている。



本節ではこの現象について述べる。



媒質中の光の伝搬は分極項を含んだ伝搬方程式によって記述される。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

(ω の単一周波数光を想定)

$$\downarrow$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\chi} \mathbf{E}$$

($\mathbf{P} = \epsilon_0 \bar{\chi} \mathbf{E}$) ($\bar{\chi}$: 誘電率テンソル)

では、磁場が印加されたときの誘電率テンソルはどうであるか。

その様子を見るため、まず、磁場 \mathbf{B} が印加された誘電体媒質内の束縛電子について考える。

双極子モデルでは

\mathbf{r} : 電子の束縛点からの位置座標

m : 電子の質量

K : 束縛力を表す定数

e : 電荷

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + K \mathbf{r} = -e \mathbf{E} - e \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \times \mathbf{B}$$

光電場は ω で振動; $\mathbf{E} \propto e^{-i\omega t}$ → 電子も ω で振動; $\mathbf{r} \propto e^{-i\omega t}$



$$-m\omega^2 \mathbf{r} + K \mathbf{r} = -e \mathbf{E} + i\omega e \mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

ところで、電子が振動すると分極が誘起される： $\mathbf{P} = -Ne\mathbf{r}$

これを代入

$$(-m\omega^2 + K)\mathbf{P} = Ne^2\mathbf{E} + i\omega e\mathbf{P} \times \mathbf{B}$$

ここで、磁場は z 方向にのみ印加されているとして、各成分について書き出す。

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + K)P_x = Ne^2E_x + i\omega eP_yB_z \\ (-m\omega^2 + K)P_y = Ne^2E_y - i\omega eP_xB_z \\ (-m\omega^2 + K)P_z = Ne^2E_z \end{cases} \quad \mathbf{P} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} P_yB_z - P_zB_y \\ P_zB_x - P_xB_z \\ P_xB_y - P_yB_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_yB_z \\ -P_xB_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

パラメータ書き換え

$$\begin{cases} \left(\frac{K}{m} - \omega^2\right)P_x = \frac{Ne^2}{m}E_x + i\omega \frac{eB_z}{m}P_y \\ \left(\frac{K}{m} - \omega^2\right)P_y = \frac{Ne^2}{m}E_y - i\omega \frac{eB_z}{m}P_x \\ \left(\frac{K}{m} - \omega^2\right)P_z = \frac{Ne^2}{m}E_z \end{cases} \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}\right) \quad \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)P_x = \frac{Ne^2}{m}E_x + i\frac{\omega eB_z}{m}P_y \\ (\omega_0^2 - \omega^2)P_y = \frac{Ne^2}{m}E_y - i\frac{\omega eB_z}{m}P_x \\ (\omega_0^2 - \omega^2)P_z = \frac{Ne^2}{m}E_z \end{cases}$$

上式から、 P_x, P_y, P_z を解き出す。

まず、第3式は P_z について単独なので、そのまま

$$\text{第3式} \rightarrow P_z = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} E_z = \epsilon_0 \chi_{33} E_z \quad \text{where} \quad \chi_{33} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

第1、2式は、 P_x, P_y についての連立方程式。まず、第2式より、

$$\text{第2式} \rightarrow P_y = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_y - i \frac{\omega eB_z}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} P_x$$

これを第1式に代入。

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)P_x &= \frac{Ne^2}{m} E_x + i \frac{\omega eB_z}{m} \left(\frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_y - i \frac{\omega eB_z}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} P_x \right) \\ P_x &= \frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega eB_z/m)^2} E_x + \frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{i\omega eB_z/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega eB_z/m)^2} E_y \end{aligned}$$

この式は、

$$P_x = \epsilon_0 \chi_{11} E_x + i\epsilon_0 \chi_{12} E_y$$

という形になっている。但し、

$$\chi_{11} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega eB_z/m)^2} \quad \chi_{12} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega eB_z/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega eB_z/m)^2}$$

$$P_y = -i \frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{(\omega e B_z / m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega e B_z / m)^2} E_x + \frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega e B_z / m)^2} E_y$$

$$= -i \varepsilon_0 \chi_{12} E_x + \varepsilon_0 \chi_{11} E_y$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \bar{\chi} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

では、上記の分極の表式をMaxwell方程式に代入。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\chi} \mathbf{E} \quad \left[\mathbf{E} \propto e^{i(kz - \omega t)} \right]$$

z 方向に伝搬する平面波を想定して各成分について書き出すと、

$$\begin{cases} k^2 E_x - \frac{\omega^2}{c^2} E_x = \frac{\omega^2}{c^2} (\chi_{11} E_x + i\chi_{12} E_y) \rightarrow \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{11}) \right\} E_x - i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} E_y = 0 \\ k^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = \frac{\omega^2}{c^2} (-i\chi_{12} E_x + \chi_{11} E_y) \rightarrow i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} E_x + \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{11}) \right\} E_y = 0 \\ -\frac{\omega^2}{c^2} E_z = \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \rightarrow E_z = 0 \end{cases}$$

このままでは何が起こるのかよくわからない。
が、 $\{x, y\}$ を円偏波系に座標変換すると見やすくなる。

$\{x, y\}$ 座標系 $\mathbf{E} = (E_x, E_y) = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$ $\left[\begin{array}{l} \mathbf{e}_x: x\text{方向単位ベクトル} \\ \mathbf{e}_y: y\text{方向単位ベクトル} \end{array} \right]$	\longleftrightarrow	円偏波座標系 $\mathbf{E} = E_R \mathbf{e}_R + E_L \mathbf{e}_L$ $\left[\begin{array}{l} \mathbf{e}_R: \text{右回り単位ベクトル} \\ \mathbf{e}_L: \text{左回り単位ベクトル} \end{array} \right]$
---	-----------------------	--

単位ベクトルの関係は、

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_L) \\ \mathbf{e}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_R - \mathbf{e}_L) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \end{cases}$$

これより係数の関係は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y &= \frac{E_x}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_L) + i \frac{E_y}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_R - \mathbf{e}_L) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + iE_y) \mathbf{e}_R + \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x - iE_y) \mathbf{e}_L = E_R \mathbf{e}_R + E_L \mathbf{e}_L \end{aligned}$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_R + E_L) \\ E_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}(E_R - E_L) \end{cases} \quad \Downarrow \quad \begin{cases} E_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x - iE_y) \\ E_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + iE_y) \end{cases}$$

この関係を使って微分方程式を書き直すと、次式となる。

$$\begin{cases} k^2 E_R - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11} + \chi_{12})E_R = 0 \\ k^2 E_L - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11} - \chi_{12})E_L = 0 \end{cases}$$

◆-----◆
(以下は導出の詳細)

$$\left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11}) \right\} (E_R + E_L) - \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} (E_R - E_L) = 0$$

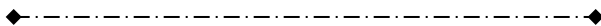
$$i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} (E_R + E_L) - i \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11}) \right\} (E_R - E_L) = 0$$



$$\begin{cases} \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11} + \chi_{12}) \right\} E_R + \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11} - \chi_{12}) \right\} E_L = 0 \\ \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11} + \chi_{12}) \right\} E_R - \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11} - \chi_{12}) \right\} E_L = 0 \end{cases}$$



$$\left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11} + \chi_{12}) \right\} E_R = 0 \quad \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{11} - \chi_{12}) \right\} E_L = 0$$



ところで、伝搬方程式は、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1 + \chi}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{または、} \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

単一周波数の平面波の場合、 $\mathbf{E} \propto e^{i(kz - \omega t)}$ なので、

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}$$

座標変換した表式と見比べると、

$$E_R \text{ に対する屈折率: } n_R = \sqrt{1 + \chi_{11} + \chi_{12}}$$

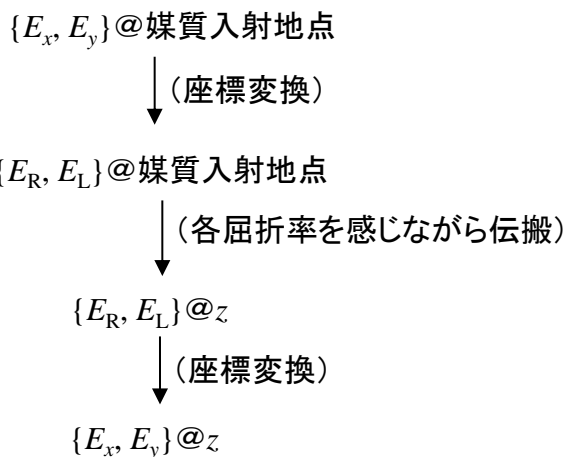
$$E_L \text{ に対する屈折率: } n_L = \sqrt{1 + \chi_{11} - \chi_{12}}$$

という対応関係になっている。

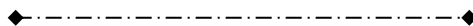
すなわち、右回り円偏波光と左回り円偏波光がそれぞれ固有の屈折率を感じる。

では、このような屈折率特性の媒質内の光の伝搬の様子をみしてみる。

通常、光電場の状態は $\{x, y\}$ 座標で表わされるので、



という道筋で透過特性を考える。



横直線偏波光が入射された場合を考える。

$$\mathbf{E}(0) = A_0 \mathbf{e}_x = A_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_L) = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_R + \frac{A_0}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_L \quad @ z = 0$$

磁場が印加された媒質を z だけ進むと、各屈折率を感じながら伝搬する。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(z) &= \frac{A_0}{\sqrt{2}} e^{in_R k_0 z} \mathbf{e}_R + \frac{A_0}{\sqrt{2}} e^{in_L k_0 z} \mathbf{e}_L \\
 &= \frac{A_0}{\sqrt{2}} e^{i(n_R + n_L)k_0 z / 2} \left\{ e^{i(n_R - n_L)k_0 z / 2} \mathbf{e}_R + e^{-i(n_R - n_L)k_0 z / 2} \mathbf{e}_L \right\} \\
 &= \frac{A_0}{\sqrt{2}} e^{i\psi} \left\{ e^{i\theta} \mathbf{e}_R + e^{-i\theta} \mathbf{e}_L \right\}
 \end{aligned}$$

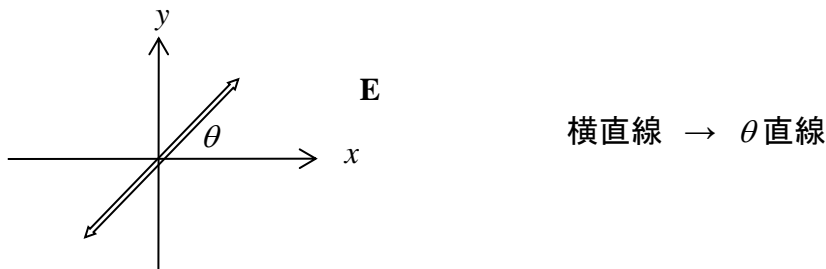
$\{x, y\}$ 座標に変換すると、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(z) &= \frac{A_0}{\sqrt{2}} e^{i\psi} \left\{ e^{i\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) + e^{-i\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \right\} \\
 &= \frac{A_0}{2} e^{i\psi} \left\{ (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \mathbf{e}_x - i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \mathbf{e}_y \right\} \\
 &= A_0 e^{i\psi} \left\{ \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \psi \equiv \frac{1}{2} (n_R + n_L) k_0 z \\ \theta \equiv \frac{1}{2} (n_R - n_L) k_0 z \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \end{array} \right)$$

この式は、電場ベクトルが θ だけ傾いた直線偏波となっていることを示している。



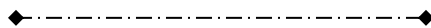
すなわち、媒質を通ると直線偏波が θ だけ回転。
回転角についてみると、

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2}(n_R - n_L)k_0z = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \chi_{11} + \chi_{12}} - \sqrt{1 + \chi_{11} - \chi_{12}})k_0z \\ &\approx \frac{1}{2}\left\{\left(1 + \frac{\chi_{11} + \chi_{12}}{2}\right) - \left(1 + \frac{\chi_{11} - \chi_{12}}{2}\right)\right\}k_0z \\ &= \frac{1}{2}\chi_{12}k_0z \\ &= \frac{1}{2} \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega e B_z / m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega e B_z / m)^2} k_0z \\ &\approx \frac{1}{2} \frac{Ne^3}{\epsilon_0 m^2} \cdot \frac{\omega B_z}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} k_0z \quad \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg (\omega e B_z / m)^2 \right] \end{aligned}$$

回転角は印加磁場と伝播距離に比例。この比例係数をベルデ定数という。

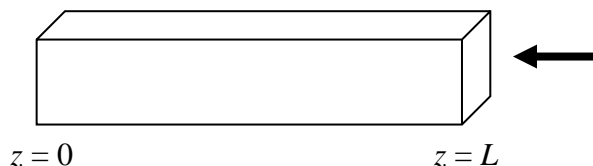
$$\theta = VBL \quad (B: \text{磁場}, L: \text{伝播距離}, V: \text{ベルデ定数})$$

回転方向は、光の進む方向に向かって反時計回り。



以上は、光が媒質中を $z=0$ から $+z$ 方向で伝播したときの話。

では、逆方向に伝播した場合はどうか。



横直線偏波光が、 $z=L$ から $-z$ 方向へ伝播したとする。

考える手順は前と同様。

$$\text{入射地点では、} \quad \mathbf{E}(L) = A_0 \mathbf{e}_x = A_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_L) = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_R + \frac{A_0}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_L \quad @ z=L$$

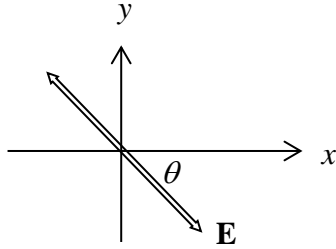
z まで進むと、

$$\mathbf{E}(z) = \frac{A_0}{\sqrt{2}} e^{-in_R k_0(L-z)} \mathbf{e}_R + \frac{A_0}{\sqrt{2}} e^{-in_L k_0(L-z)} \mathbf{e}_L$$

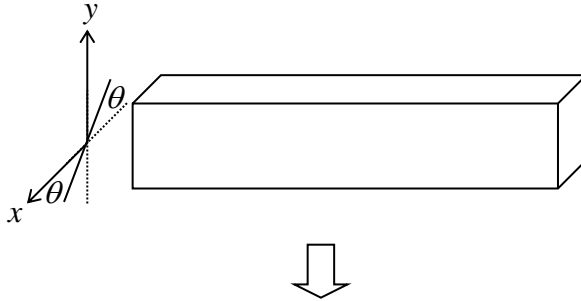
(伝播距離 = $L - z$ 、逆方向に進む波なので伝播位相は負符号)

前と同様に式を展開すると、 $\mathbf{E}(z) = A_0 e^{i\psi} \{ \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x - \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y \}$

この式は、電場ベクトルが $-\theta$ だけ傾いた直線偏波となっていることを示している。

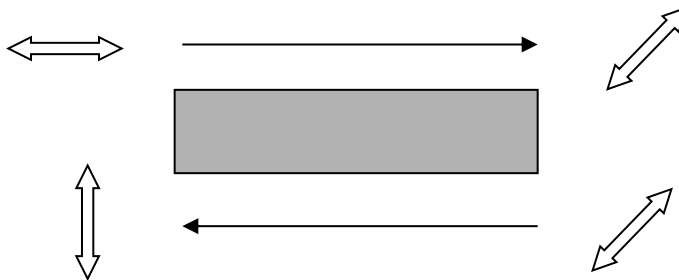


座標系の向きを考えると、媒質を進むにつれて反時計回りに回転することになる。



ファラデー効果においては、進む方向には依らず、常に進行方向に向かって同一方向に偏波が回転する。

言い方を変えると、方向に対して非可逆な効果。



光アイソレータ

光通信システムでは、反射光を防ぐため、光を一方向のみに透過させる素子＝光アイソレータが用いられる。動作原理はファラデー効果。

ファラデー媒質の両端に 45° 傾いた偏光子を配置する。



媒質長・印加磁場は、直線偏波光が媒質を透過すると 45° 回転するように設定する。

すると、左から入力された横直線偏波光は斜め偏光となり右端の偏光子を透過する一方、右から入力された斜め直線は縦直線偏光となり左端の偏光子で阻止される。

つまり、左から右へは透過、右から左へは阻止。⇒ アイソレータ

[3.1] 雨上がりの空に虹が見える理由を説明せよ。

[3.2] 電気光学結晶である LiNbO_3 の{印加電界 V 、入射光 E 、電束密度 D }を関係付けるテンソルの成分は、 $r_{13} = 8.6 (10^{-12} \text{ m/V})$ 、 $r_{33} = 31 (10^{-12} \text{ m/V})$ である。この結晶において、 z 軸方向に信号電界を印加し、 y 軸方向へ伝搬する x 偏波光または z 偏波光の位相を変調する。位相を π 変調するのに必要な電界は、 x 偏波光と z 偏波光でどれだけ異なるか、比率で答えよ(有効数字2桁)。なお、複屈折率差は無視してよい。

[3.3] 複屈折の主軸が x, z 方向である長さ L の LiNbO_3 結晶に対し、角度 θ の直線偏波光を強度 I_0 で y 方向から入射する(下図)。

- (a) 入射時の偏波状態を (x, z) 座標で表せ。但し、簡単のため、光強度 $= |\text{複素振幅}|^2$ とする。
- (b) 電界無印加時の結晶出射時の偏波状態を表せ。
- (c) z 方向に電界 V を加えた時の結晶出射時の偏波状態を表せ。
- (d) 出射端に直線偏波光のみを透過させる検光子を左斜め ϕ の角度で配置した(下図)。透過光強度を表せ。

