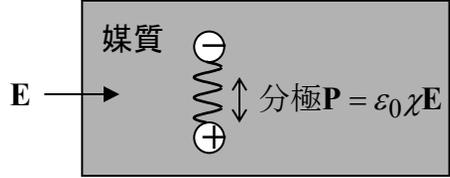


I. 光に関する基本的事項

光は振動しながら伝搬する電磁場

誘電体(伝導性のない媒質)中のMaxwell方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$



$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H} \quad (\text{速い振動については}) \mu_0 \approx \mu \end{cases}$$

\mathbf{E} : 電場
 \mathbf{H} : 磁場
 \mathbf{D} : 電束密度
 \mathbf{B} : 磁束密度

μ (ミュー): 透磁率
 ε (イプシロン): 誘電率
 χ (カイ): 感受率

Maxwell方程式を展開。

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (\mathbf{H} \text{ についても同様})$$

伝搬方程式 or 波動方程式

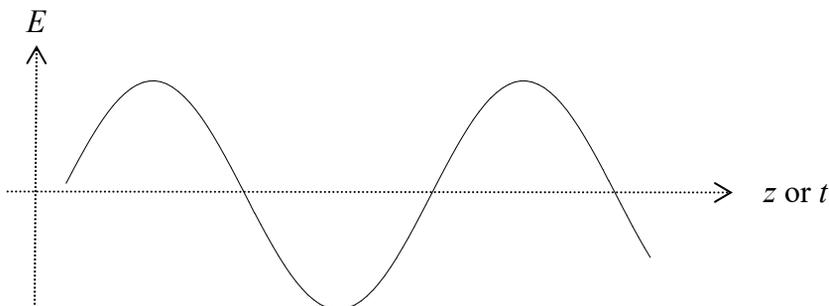
\mathbf{E} は $\{x, y\}$ 方向には一様とすると(平面波近似)、

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

E_x に着目。その解は、

$$E_x(z, t) = A \cos[kz \pm k(1/\sqrt{\mu\varepsilon})t + \theta] \quad (A, \theta, k: \text{定数})$$

時間的/空間的に正弦波振動する電場(磁場についても同様) = 電磁波



横軸を空間座標 z とすると、速度 $= (1/\sqrt{\mu\varepsilon})$ で平行移動する正弦波。

$$E_x(z, t) = A \cos[kz - k(1/\sqrt{\mu\varepsilon})t + \theta] \quad +z \text{ 方向}$$

$$E_x(z, t) = A \cos[kz + k(1/\sqrt{\mu\varepsilon})t + \theta] \quad -z \text{ 方向}$$

$\{t_0, x_0\}$ における E_x が、時間 Δt の間に距離 Δz だけ移動したとする。

$$E_x(t_0, z_0) = E_x(t_0 + \Delta t, z_0 + \Delta z)$$

$$A \cos[kz_0 - k(1/\sqrt{\mu\varepsilon})t_0 + \theta] = A \cos[k(z_0 + \Delta z) - k(1/\sqrt{\mu\varepsilon})(t_0 + \Delta t) + \theta]$$

$$= A \cos[kz_0 - k(1/\sqrt{\mu\varepsilon})t_0 + \theta + k\Delta z - k(1/\sqrt{\mu\varepsilon})\Delta t]$$



$$\Delta z - (1/\sqrt{\mu\varepsilon})\Delta t = 0$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

移動速度

真空中であれば、移動速度 $= (1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0})$

これは真空中の光の速度 c に他ならない。

光速

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \quad (c = 3 \times 10^8 \text{ m/s})$$

c を使うと、媒質中の速度 v は、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \cdot \frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c \cdot \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\chi}} = \frac{c}{\sqrt{(1+\chi)(\mu/\mu_0)}}$$

〔光領域では $\mu \doteq \mu_0$ 〕

つまり、媒質中の速度は真空中の $\frac{1}{\sqrt{(1+\chi)(\mu/\mu_0)}}$ 倍。

ここで、速度が遅くなる比率を n とおく; $n \equiv \sqrt{(1+\chi)(\mu/\mu_0)}$

屈折率

$$v = \frac{c}{n}$$

電磁波を特徴付けるパラメータ: 周波数、波長、伝播定数

$$E_x(z, t) = A \cos[kz - k(c/n)t + \theta]$$

固定地点でみると、時間的に正弦波状に振動。その周期を T とすると、

$$k(c/n)(t_0 + T) = k(c/n)t_0 + 2\pi \quad \rightarrow \quad k(c/n)T = 2\pi \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi n}{kc}$$

単位時間当たりの振動数は、 $\frac{1}{T} = \frac{kc}{2\pi n}$

これは **周波数** f に他ならない。 $f \equiv \frac{kc}{2\pi n} \rightarrow k = \frac{2\pi n f}{c} \rightarrow E_x(z, t) = A \cos[kz - 2\pi ft + \theta]$

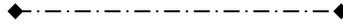
〔ちなみに、光の周波数は、 $10^{14} \sim 10^{15} \text{Hz}$ くらい〕

あるいは、表記の簡略化のため、時間項の係数をまとめて $\omega \equiv 2\pi f$

角周波数

$$E_x(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \theta)$$

〔 ω (オメガ) 〕



同様に固定時刻では、空間的に正弦波状に振動。その1周期を Z とすると、

$$k(z_0 + Z) = kz_0 + 2\pi \rightarrow kZ = 2\pi \rightarrow Z = \frac{2\pi}{k}$$

これは **波長** λ' に他ならない。 $\lambda' \equiv \frac{2\pi}{k} \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda'} \rightarrow E_x(z, t) = A \cos[(2\pi / \lambda')z - \omega t + \theta]$

〔 λ (ラムダ) 〕

定数 k は空間振動の様子を表すパラメータとなっている。

伝搬定数

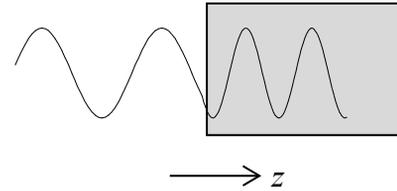
or

波数

伝播定数(または空間周期)は屈折率に依存、すなわち媒質依存。

光の属性を表すパラメータとしては媒質に依らないことが望ましい。

そこで、真空中の伝播定数あるいは空間周期で光の特性を表す。



$$k_0 \equiv \frac{\omega}{c}$$

真空中の伝搬定数

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$$

波長

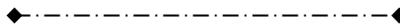
$$f\lambda = c$$

可視光: $\lambda = 0.4 \sim 0.7 \mu\text{m}$

(マイクロン)

すると、 $E_x(z, t) = A \cos(nk_0 z - \omega t + \theta)$

E_y についても同様。これが、平面波を表す基本表式。



ところで、 E_z については、 $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$

一方、Maxwell方程式より、 $\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

(但し、 ϵ は定数として)

上記の $\{E_x, E_y\}$ を代入すると、 $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

これが成り立つためには、 $E_z = 0$

つまり、 z 方向へ伝搬する光では、 z 方向に振動する電場成分はゼロ。

光は横波

複素数表示

ところで、伝搬方程式の解としては次式もあり得る。

$$E_{x,y} = A \exp[i(kz - \omega t + \theta)]$$

$$\left(\frac{\partial^2 E_{x,y}}{\partial z^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_{x,y}}{\partial t^2} \right)$$

が、複素数なので実際に観測できる物理量とはなりえない。

実際の物理量である正弦波表示とは次のように関係付けられる。

$$\operatorname{Re}[E] = A \cos(kz - \omega t + \theta) \quad (\text{簡単のため、添え字 } x,y \text{ は省略})$$

そこで、実数部が実際の物理量という了解の基で、複素表示で光の状態を表すのが通例。

複素表示の方が、光の様々な振る舞い(e.g., 光強度や光パワー、複数の光の重ね合わせ、干渉現象、非線形現象、など)を数学的に取り扱うのに便利なため。

$$E = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \quad \tilde{A} \equiv A e^{i\theta} \quad \text{複素振幅}$$

以降、複素表示を前提として話を進め、複素数であることを表すチルダは省略。

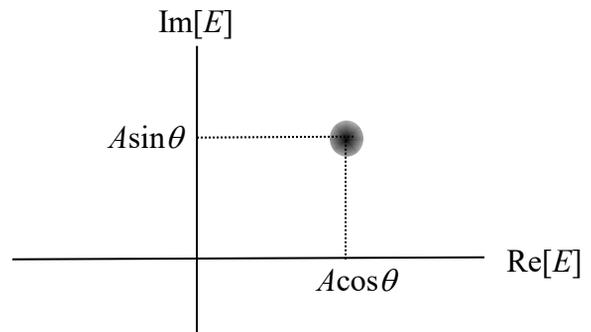


なお、

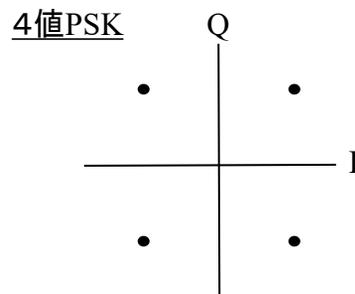
複素振幅の実数部/虚数部は、光電場振動 $\cos(\omega t - \theta)$ の \cos 振動成分/ \sin 振動成分の振幅、に対応。

$$\left(\begin{array}{l} \text{実数正弦波表示は、次のように } \sin \text{ 振動成分と } \cos \text{ 振動成分に展開される。} \\ E = A \cos(\omega t - \theta) = A \{ \cos \omega t \cdot \cos \theta + \sin \omega t \cdot \sin \theta \} = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t \\ \text{但し、 } A_c = A \cos \theta = \operatorname{Re}[\tilde{A}] \quad A_s = A \sin \theta = \operatorname{Im}[\tilde{A}] \end{array} \right)$$

光の振幅の状態は、{横軸: \cos 成分(実数成分)、縦軸: \sin 成分(虚数成分)}とする2次元平面で図的に表される(複素振幅平面 or コンスタレーション図)



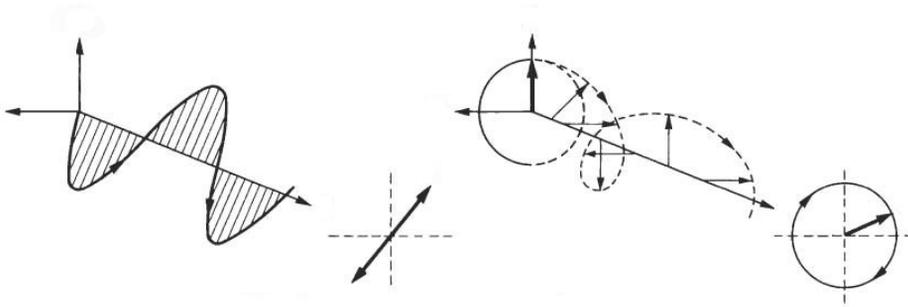
複素平面図において、実数部(= \cos 成分)をI成分(In-phase)、虚数部(\sin 成分)をQ成分(Quadrature-phase)と呼ぶことも多い。これは、基本振動 $\cos \omega t$ を基準にすると、 $\theta = 0$ とした時(同位相)の振幅が実数部、 $\theta = \pi/2$ とした時(1/4周期シフト)の振幅が虚数部、であるため。



偏波

z 方向へ伝搬する光電場は、 $\{x, y\}$ 平面すなわち伝搬方向に垂直な平面上で振動。

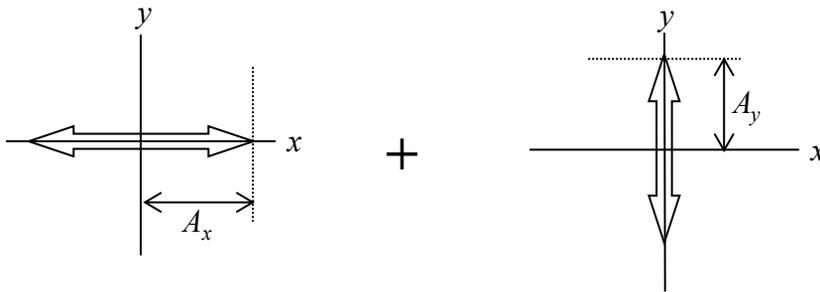
この垂直平面内の振動の仕方を **偏波** と呼ぶ。



偏波状態は、横振動成分と縦振動成分に分解して、それぞれを要素とする二次元ベクトルで表示される。但し、振動項は括り出して複素振幅ベクトルで表すのが通例。

$$\mathbf{E} = (A_x e^{i(kz - \omega t + \theta_x)}, A_y e^{i(kz - \omega t + \theta_y)}) = \boxed{(A_x, A_y e^{i\theta})} e^{i(kz - \omega t + \theta_x)} \quad \theta \equiv \theta_y - \theta_x$$

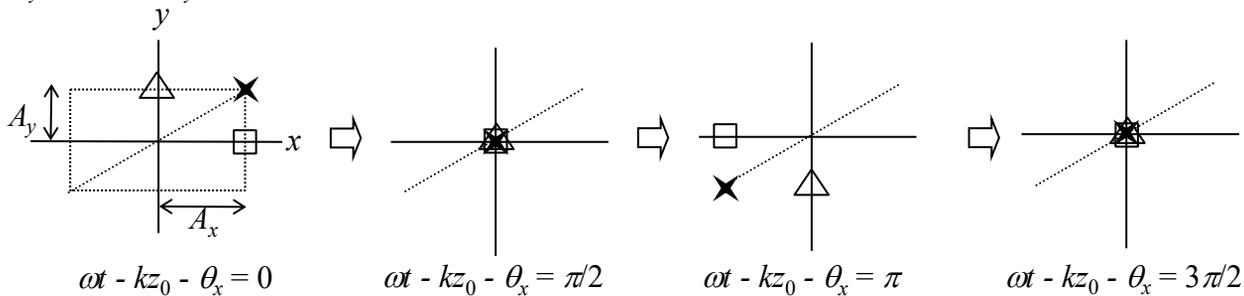
固定地点 z_0 における光電場振動は横振動と縦振動の合成。



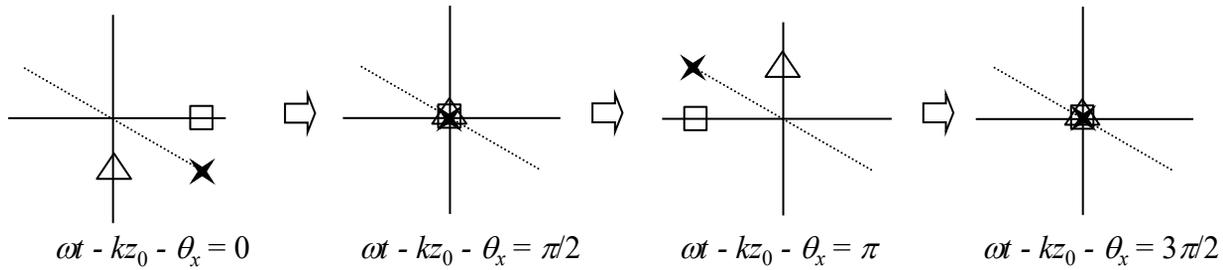
合成振動の様子は、縦/横の振幅比 A_x/A_y 、及び位相差 θ で決まる。

実際の振動は $(A_x \cos[kz_0 - \omega t + \theta_x], A_y \cos[kz_0 - \omega t + \theta_y]) = (A_x \cos[\omega t - kz_0 - \theta_x], A_x \cos[\omega t - kz_0 - \theta_y])$ であることに留意して軌跡を辿ってみると(□: x 成分、△: y 成分、★: 合成波)

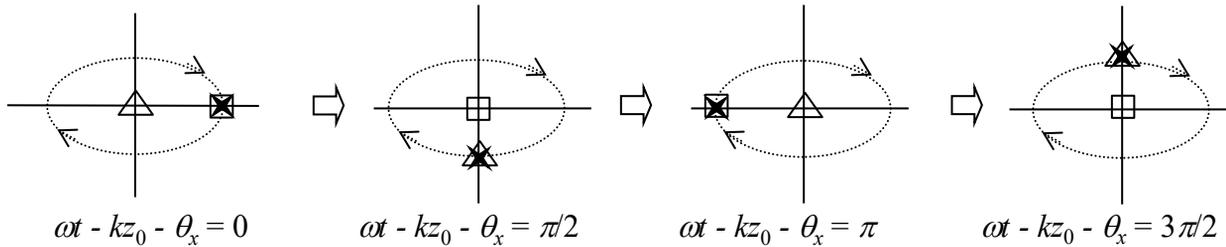
(A_x, A_y) の場合 ($\theta_y = \theta_x$): 右斜め直線



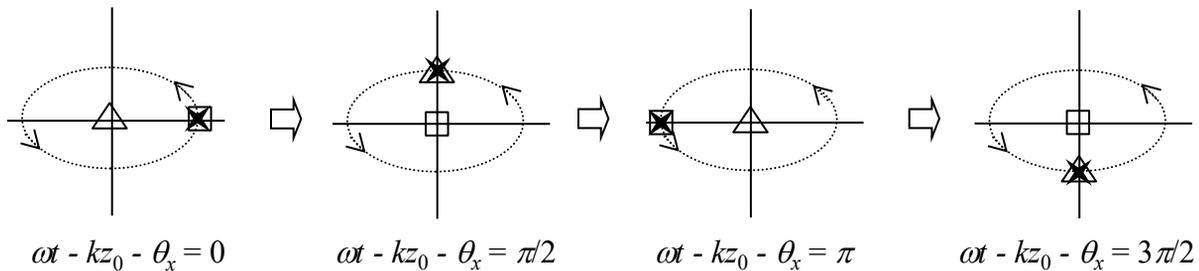
$(A_x, A_y e^{i\pi})$ の場合 ($\theta_y = \theta_x + \pi$: y は半周期遅れて振動) → 左斜め直線



$(A_x, A_y e^{-i\pi/2})$ の場合 ($\theta_y = \theta_x - \pi/2$: y は1/4周期進んで振動) → 右廻り楕円



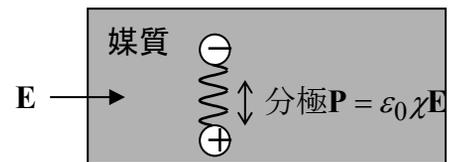
$(A_x, A_y e^{i\pi/2})$ の場合 ($\theta_y = \theta_x + \pi/2$: y は1/4周期遅れて振動) → 左廻り楕円



なお、右廻り/左廻りは座標の正負の定義(or 眺める方向)に依るので、絶対的なものではない。

複屈折と偏波

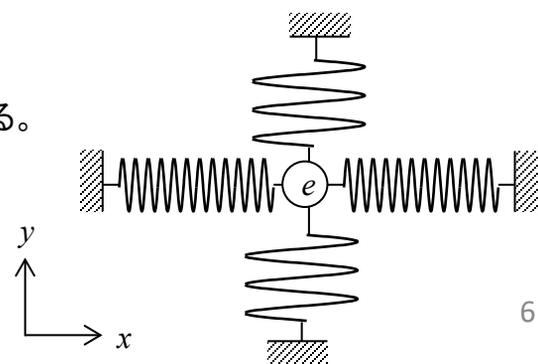
屈折率は媒質内で分極が誘起されることから生じる。



媒質は三次元立体状なので、分極誘起にも方向性がある。

↓
伝播光電場の振動方向によって屈折率が異なる。

複屈折率



複屈折媒質内を光が伝播すると、偏波状態が変化する。

{x振動成分の屈折率が n_x 、y方向振動成分の屈折率が n_y }

である媒質を伝播する光電場は、

$$\begin{aligned} & (E_x(0)e^{in_x k_0 z}, E_y(0)e^{in_y k_0 z})e^{-i\omega t} \\ & \parallel \\ & (E_x(0), E_y(0)e^{i\Delta n k_0 z})e^{i(n_x k_0 z - \omega t)} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} k_0: \text{真空中の伝播定数} \\ E_x(0), E_y(0): z=0 \text{における}x \text{成分、}y \text{成分} \\ \Delta n = n_y - n_x: \text{屈折率差} \end{array} \right)$$

例えば、 $z=0$ において右斜め 45° 直線偏波とする。

$$(E_x(0), E_y(0)) = (A, A)$$

(註: 共通項は偏波表示の対象外)

$$z = \frac{\pi}{2\Delta n k_0} \quad \text{では、} (A, A \exp[i\Delta n k_0 (\pi / 2\Delta n k_0)])e^{in_x k_0 z} = (A, A e^{i\pi/2})e^{in_x k_0 z}: \text{左回り円偏波}$$

$$z = \frac{\pi}{\Delta n k_0} \quad \text{では、} (A, A e^{i\pi})e^{in_x k_0 z}: \text{左斜め直線偏波}$$

$$z = \frac{3\pi}{2\Delta n k_0} \quad \text{では、} (A, A e^{i3\pi/2})e^{in_x k_0 z} = (A, A e^{-i\pi/2})e^{in_x k_0 z}: \text{右回り円偏波}$$

$$z = \frac{2\pi}{\Delta n k_0} \quad \text{では、} (A, A e^{i2\pi})e^{in_x k_0 z} = (A, A)e^{in_x k_0 z}: \text{右斜め直線偏波}$$

但し、入射状態が x 成分または y 成分のみの場合はそのまま伝搬。

光強度

光電場振動は非常に速いので、これを直接観測することはできない。

そのため、光強度または光エネルギーが光の観測量となる。

光のエネルギー流(単位時間・単位断面積当り)は、次のポインティングベクトル \mathbf{S} で表される。

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

z 方向へ伝搬する平面波の場合、 z 成分はゼロ。

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \begin{pmatrix} E_y H_z - E_z H_y \\ E_z H_x - E_x H_z \\ E_x H_y - E_y H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_x H_y - E_y H_x \end{pmatrix}$$

$$\left(\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = ik \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)$$

光強度 I は、ポインティングベクトルの大きさの平均値で与えられる。

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle = \langle E_x H_y - E_y H_x \rangle = \frac{k}{\omega\mu} \langle -A_x^2 \cos^2(kz - \omega t + \theta_x) - A_y^2 \cos^2(kz - \omega t + \theta_y) \rangle$$

$$\left(\begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kA_y \sin(kz - \omega t + \theta_y) \\ kA_x \sin(kz - \omega t + \theta_x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow H_x = \frac{k}{\omega\mu} A_y \cos(kz - \omega t + \theta_y) \quad H_y = -\frac{k}{\omega\mu} A_x \cos(kz - \omega t + \theta_x) \end{array} \right)$$

$$= \frac{k}{\omega\mu} \langle A_x^2 \cdot \frac{1 + \cos[2(kz - \omega t + \theta_x)]}{2} + A_y^2 \cdot \frac{1 + \cos[2(kz - \omega t + \theta_y)]}{2} \rangle = \frac{nc\epsilon_0}{2} (A_x^2 + A_y^2)$$

$$\left(\frac{k}{\omega\mu} = n \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{\omega\mu} = \frac{n}{c\mu} = nc\epsilon_0 \cdot \frac{1}{c^2 \epsilon_0 \mu} = nc\epsilon_0 \cdot \frac{1}{(1/\mu_0 \epsilon_0) \epsilon_0 \mu} \approx nc\epsilon_0 \right)$$

上記は実数表示。複素数表示では、

$$\tilde{E}_x = A_x e^{i(kz - \omega t + \theta_x)} \quad \tilde{E}_y = A_y e^{i(kz - \omega t + \theta_y)}$$

なので、

$$I = \frac{nc\epsilon_0}{2} (A_x^2 + A_y^2) = \frac{nc\epsilon_0}{2} (|\tilde{E}_x|^2 + |\tilde{E}_y|^2) = \frac{nc\epsilon_0}{2} |\tilde{\mathbf{E}}|^2$$

絶対値を問題にしないときは、簡単のため、

$$(\text{光強度}) = (\text{複素振幅の絶対値二乗})$$

$$I = |\mathbf{E}|^2$$

とするのが一般的。

光パワー P は、光強度 I を光の断面積にわたって積分したもの。

$$P = \int_S I dx dy$$

但し、絶対値を問題としないときは、こちらも

$$(\text{光パワー}) = (\text{複素振幅の絶対値二乗})$$

とすることが多い。

演習問題

[1.1] ある位置における光電場振動が実数表示で $E_1 = A_1 \cos(\omega t + \theta_1)$ 及び $E_2 = A_2 \sin(\omega t + \theta_2)$ と表される同一偏波状態の2つの光波について、

- (a) 各光電場の振幅を複素表示で表せ。
- (b) $E_1 + E_2$ の複素振幅を $E = Ae^{i\theta}$ と表記した時 (A, θ は実数) の A 及び θ を $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ で表せ。
- (c) 上記合成波 E の光強度を $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ で表せ。但し、光強度 = |複素振幅|^2 とする。

[1.2] 前問において、 E_1 は横直線偏波状態、 E_2 は右斜め60度直線偏波であるとする。

- (a) 各光電場の振幅を、偏波状態を示す二次元複素ベクトルで表せ。
- (b) 上記の合成波の光強度を表せ。但し、光強度 = |複素振幅|^2 とする。

[1.3] 進行方向に対し垂直な xy 平面上で、下左図のように、長辺と短辺の長さの比が $a:b$ である長方形の右斜め対角線に沿って振動しながら伝播する {波長 λ , 光強度 I_0 } の平面波がある。

- (a) この光の振幅を偏波状態を示す二次元複素ベクトルで表せ。
- (b) 上記の光を、厚さ d 、 x 成分/ y 成分の屈折率がそれぞれ $\{n_x, n_y\}$ である複屈折板に通した。透過光の複素振幅ベクトルを表せ。
- (c) 上記の光を x 軸に対して角度 θ の直線振動成分のみを透過させる光素子 (検光子) に通した。検光子透過後の光振幅を表せ。

ヒント: 検光子透過光振幅は x 成分の検光子透過軸への射影成分と y 成分の射影成分の和

- (d) 検光子透過光の強度を表せ。

