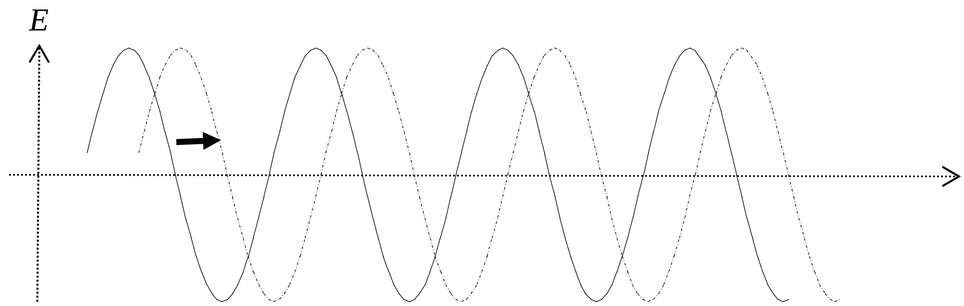
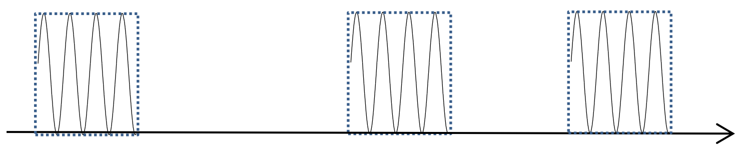
Ⅲ. 光の伝搬特性

群速度

通常、光の速度（c/n）と言うときは、正弦波の移動速度のことを指す。



一方、通信で使うのは変調された光。例えば、強度変調光。



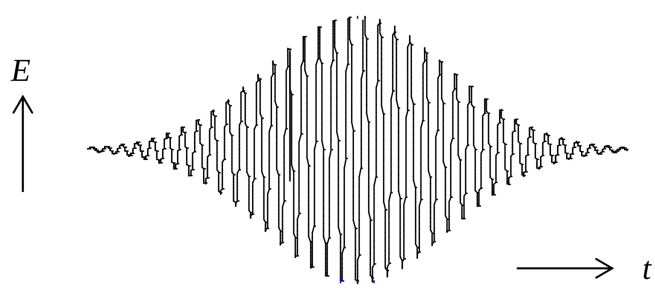
では、光パルスの移動速度＝正弦波の移動速度、なのか？

◆-----------------------------------◆

$z = 0$ における光電場を次のように表す。

$$E(0,t) = A(0,t)\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}A(0,t)e^{-i\omega_c t} + c.c.$$

（ω_c：搬送波角周波数）
（$c.c.$　複素共役）



包絡線の時間波形 $A(0,t)$ は周波数成分に分解して表される（フーリエ変換）。

$$A(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(\Omega)e^{-i\Omega t}d\Omega.$$

これを代入すると、

$$E(0,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(\Omega)e^{-i(\omega_c+\Omega)t}d\Omega + c.c.$$

この光電場が z だけ伝搬すると、各周波数成分に伝搬位相 kz が付け加わる。

$$E(z,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(\Omega)e^{ik_\Omega z}e^{-i(\omega_c+\Omega)t}d\Omega+c.c.$$

（k_Ω : $\omega_c+\Omega$の伝搬定数）
（簡単のため、損失は無視）

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(\Omega)e^{i(k_\Omega-k_c)z}e^{-i\Omega t}d\Omega\right\}}_{\text{包絡線 }A(z,t)}e^{i(k_c z-\omega_c t)}+c.c.$$

（k_c :搬送波の伝搬定数）

ここで、伝搬定数 k を搬送波角周波数 ω_c の近傍でテーラー展開する。

$$k_\Omega=k_c+\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_c}\Omega+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_c}\Omega^2+\cdots$$

$$=k_c+\frac{1}{v_g(\omega_c)}\Omega+\frac{1}{2}k_2(\omega_c)\Omega^2+\cdots$$

$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{v_g}\equiv\dfrac{dk}{d\omega}\\[2ex] k_2\equiv\dfrac{d^2k}{d\omega^2}\end{array}\right)$$

すると、

$$A(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(\Omega)\exp\left[i\{(k_c+\frac{1}{v_g}\Omega+\frac{1}{2}k_2\Omega^2+\cdots)-k_c\}z\right]\cdot e^{-i\Omega t}d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(\Omega)\exp\left[i\{(\frac{1}{v_g}\Omega+\frac{1}{2}k_2\Omega^2+\cdots)z-\Omega t\}\right]d\Omega$$

ここで、k の微小展開の一次近似項までを考える。

$$A(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(\Omega)\exp\left[i\left(\frac{z}{v_g}-t\right)\Omega\right]d\Omega$$

これを初期状態と比べると、

$$A(z,t+\frac{z}{v_g})=A(0,t)$$

上式は、$z=0$ での包絡線波形がz/v_g 後に z だけ離れた位置に移動した、ことを表している。

その移動速度は、

$$\frac{z}{(z/v_g)}=v_g$$

$\boxed{\text{群速度}}$:パルスの移動速度

ところで、テーラー展開式より、$\dfrac{1}{v_g}=\dfrac{dk}{d\omega}=\dfrac{d}{d\omega}(\dfrac{n\omega}{c})$

屈折率が周波数に依らない一定値とすると、

$$\frac{1}{v_g}=\frac{n}{c}\frac{d\omega}{d\omega}=\frac{n}{c}\longrightarrow v_g=\frac{c}{n}$$

群速度＝光速

一般には分散があるので、

$$\frac{1}{v_{\mathrm{g}}}=\frac{n}{c}\frac{d\omega}{d\omega}+\frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}=\frac{n}{c}+\frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega}=\frac{n}{c}\left(1+\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right) \longrightarrow v_{\mathrm{g}}=\frac{c}{n}\left(1+\underbrace{\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}}\right)^{-1}$$

この分だけ、群速度≠光速

なお、群速度と使い分ける場面では、正弦波の移動速度(c/n)のことを 位相速度 と呼ぶ。

群速度は物理的には以下のようにも理解される。

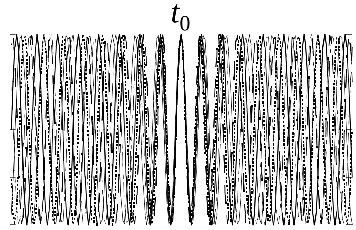
包絡線波形は複数の周波数成分の重ね合わせで表される。

$\Updownarrow$

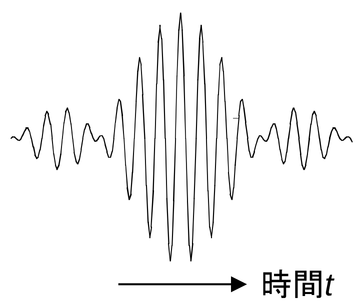
複数の周波数成分の重ね合わせは包絡線波形を形成する。

その際、各周波数成分の位相が揃った位置が包絡線のピーク。

例えば、
時刻 t_0 で<u>位相が揃った</u>
5つの周波数光の重ね描き



足し算した光電場は



この包絡線ピーク（位相が揃った点）の移動速度がパルスの移動速度。

式で表すと、まず、ピークが現れる{時間、空間}の条件は、

$$k(\omega_i)z - \omega_i t = 0 \qquad \text{for any } \omega_i$$

初期状態として、$\{t_0, z_0\}$にピークがあったとする。

$$k(\omega_i)z_0 - \omega_i t_0 = 0 \qquad \text{for any } \omega_i$$

そこからずれた時空間$\{t_0+\Delta t, z_0+\Delta z\}$における位相は、

$$k(\omega_i)(z_0+\Delta z)-\omega_i(t_0+\Delta t)=k(\omega_i)\Delta z-\omega_i\Delta t$$

各角周波数を $\omega_i=\omega_{\mathrm{c}}+\Omega_i$ とし、伝搬定数 $k(\omega_i)$を角周波数 ω_{c} の周りで微小展開して、
一次近似項までを上の表式に代入する。

$$(k_{\mathrm{c}}+\frac{1}{v_{\mathrm{g}}}\Omega_i)\Delta z-(\omega_{\mathrm{c}}+\Omega_i)\Delta t=k_{\mathrm{c}}\Delta z-\omega_{\mathrm{c}}\Delta t+\left(\frac{\Delta z}{v_{\mathrm{g}}}-\Delta t\right)\Omega_i$$

どの周波数成分についてもこれが同一値（= 0）であれば、そこが包絡線ピークとなる。そのためには、

$$\frac{\Delta z}{v_{\mathrm{g}}} - \Delta t = 0 \longrightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} = v_{\mathrm{g}}$$

包絡線ピークの移動速度は v_g＝群速度

群速度分散

前項では、伝搬定数の微小展開の１次項までを考えた。

さらに2次の項まで考えてみる。

$$k(\omega_{\mathrm{c}} + \Omega_i) = k_{\mathrm{c}} + \frac{1}{v_{\mathrm{g}}(\omega_{\mathrm{c}})}\Omega_i + \frac{1}{2}k_2(\omega_{\mathrm{c}})\Omega_i^2$$

$$\left(\frac{1}{v_{\mathrm{g}}} \equiv \frac{dk}{d\omega} \qquad k_2 \equiv \frac{d^2k}{d\omega^2} \right)$$

２次項の係数は次のように書き換えられる。

$$k_2 = \frac{d^2k}{d\omega^2} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{v_{\mathrm{g}}}\right) = -\frac{1}{v_{\mathrm{g}}^2}\frac{dv_{\mathrm{g}}}{d\omega}$$

上式において、$(1/v_{\mathrm{g}})$ は単位長さをパルスが通過する所要時間。

その周波数依存性を表すのが第２次項。これを群速度分散と呼ぶ。

群速度分散があると、初期地点で各周波数成分の位相が揃っていても、伝搬するにつれて位相が揃わなくなる。

初期状態として、$\{z_0, t_0\}$で各周波数成分の位相が揃っていたとする。

$$k(\omega_i)z_0 - \omega_i t_0 = 0 \qquad \text{for any } \omega_i$$

$\{z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t\}$における位相は、

$$k(\omega_i)(z_0 + \Delta z) - \omega_i(t_0 + \Delta t) = k(\omega_i)\Delta z - \omega_i \Delta t$$

これに、k の２次までの近似表式を代入する。

$$k(\omega_{\mathrm{c}} + \Omega_i)\Delta z - (\omega_{\mathrm{c}} + \Omega_i)\Delta t = \left(k_{\mathrm{c}} + \frac{1}{v_{\mathrm{g}}}\Omega + \frac{1}{2}k_2\Omega^2\right)\Delta z - (\omega_{\mathrm{c}} + \Omega_i)\Delta t$$

$$= k_{\mathrm{c}}\Delta z - \omega_{\mathrm{c}}\Delta t + \left(\frac{\Delta z}{v_{\mathrm{g}}} - \Delta t\right)\Omega_i + \frac{1}{2}k_2\Omega_i^{\,2}\Delta z$$

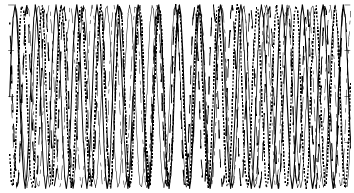
$\Delta z/v_{\mathrm{g}} = \Delta t$ であっても、周波数（Ω_i）依存性が残る。

||

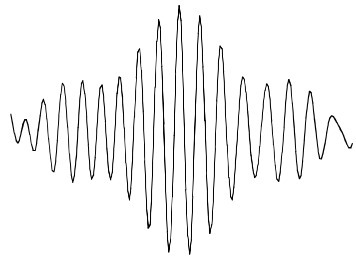
１次近似ではパルスピークとなる$\{z, t\}$において、各周波数成分の位相が揃わない。

位相が完全に揃わないと、パルスのピーク値が下がり、時間幅が拡がる。

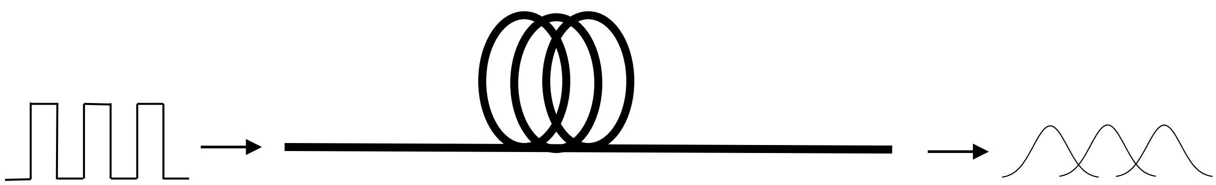
位相が微小にずれている5つ
の周波数成分の重ね描き



合成波



つまり、群速度分散があると、パルス拡がりが生じる。 → 伝送特性劣化



ファイバ内の群速度分散の程度は、通常、次式で定義される分散値 D_c で表される。

$$D_\mathrm{c} \equiv -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}k_2$$

$$\left(\begin{array}{l}\lambda: \text{波長} \\ c: \text{光速}\end{array}\right)$$

より詳しくは、$k = n\omega/c$ なので、

$$D_\mathrm{c} \equiv -\frac{2\pi}{\lambda^2}\left(\omega\frac{d^2n}{d\omega^2} + 2\frac{dn}{d\omega}\right)$$

つまり、(実効)屈折率の周波数依存性(色分散)が群速度分散の源。

ちなみに、通常シングルモード・ファイバの1.5μm帯における分散値は、D_c = 17 ps/km-nm

偏波状態の伝搬特性

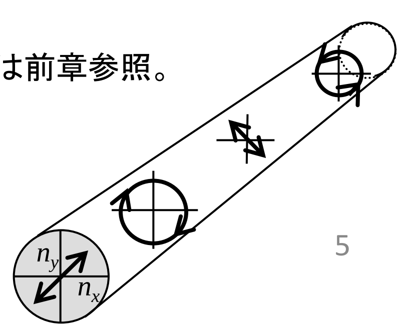
前章にて、複屈折媒質を伝搬すると偏波状態が変化することを述べた。

ファイバはガラス媒質かつ円対称構造なので、理想的には複屈折性はない。

が現実には、製造工程で発生する不均一性や周囲からかかる圧力の非対称性により、

複屈折性が存在する。これを偏波分散と呼ぶ。

このため、ファイバ伝搬につれて偏波状態が変化する。変化に仕方は前章参照。



なお、屈折率が最大/最小である軸を主軸という。

上記は複屈折の主軸が定まっている場合の話。

光ファイバの複屈折性は、製造上の非対称性や外部からの圧力・捻じれなどによって生じるため、複屈折の軸方向及び複屈折率差は伝搬方向にわたってランダムに変化している。

よって、伝搬光の偏波状態変化もランダム。

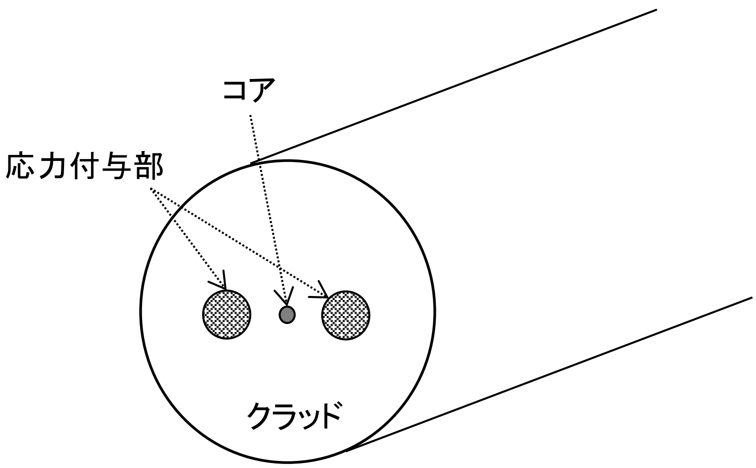
従って、光ファイバー伝搬による偏波状態変化は定式化できない。

偏波保持ファイバ

特殊な構造のファイバでは、直線偏波光はそのままで伝搬する。

このようなファイバを偏波保持ファイバという。

具体的には、わざと大きな複屈折性（Δn = 10^{-4} ~ 10^{-5})を持たせたファイバ。



コアの両側に熱膨張係数の異なる媒体を配置

↓

ファイバ作製時に歪み発生

↓

コアに対し両側から歪み圧力

↓

歪み方向に複屈折率発生

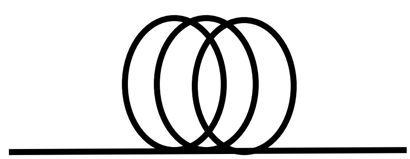
屈折率差：10^{-4} ~ 10^{-5}

PANDA（Polarization-maintaining AND Absorption-reducing）ファイバ

このようにすると、外部擾乱（圧力、捻じれなど）による複屈折性（10^{-6} ~ 10^{-7}）はほとんど無視できる大きさとなり、作り込みの複屈折性が主となる。したがって、複屈折の方向は一定。

そこへ複屈折方向に一致した直線偏波光を入射すると、その方向の直線偏波状態のままファイバを伝搬していく。

$\mathbf{E}(0) = (A,0)e^{-i\omega t}$



$\mathbf{E}(z) = (Ae^{in_x k_0 z},0)e^{-i\omega t}$

但し、偏波状態を保持するのは複屈折軸の方向に一致した直線偏波光のみ。

どんな偏波状態でも保持するわけではない。

演習問題

[3.1] 郡速度 v_g および分散パラメータ D_c はそれぞれ次式で定義される。

$$\frac{1}{v_g} \equiv \frac{dk}{d\omega} \qquad\qquad D_c \equiv -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)$$

(a) 波長 λ における郡速度の角周波数依存性 $\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\omega$ を、D_c, c, λ, 及び λ における郡速度 $v_g(\lambda)$ で表せ。

(b) 波長1.5μm近傍で波長間隔が0.8nmの２つの波長光が10Gbpsで強度変調されている。この２つの光パルス列がD_c = 17 ps/km-nmの光ファイバを伝播するとき、２つのパルス列の相対時間位置が１ビット分ずれる伝播長を求めよ。

[3.2] ガウス型の光パルスが群速度分散により拡がる様子を数式で表わそう。

(a) $z = 0$において振幅の時間波形$A(0, t)$が次式で表される光パルスを考える。

$$A(0,t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{T}\right)^2\right] \qquad (T\text{: パルス幅を表す定数})$$

この時間波形を次式のようにフーリエ変換表示したときの周波数波形 $\tilde{A}(0,\Omega)$ を表せ。

$$A(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(0,\Omega)e^{-i\Omega t}d\Omega$$

解答にあたっては、次の公式を用いるとよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/a)^2}dx = a\sqrt{\pi} \qquad (a\text{: 定数})$$

(b) 上記パルスが $z = L$ までファイバ伝搬したときの振幅の周波数波形 $\tilde{A}(L,\Omega)$ を、伝搬定数 k の2次までの微小展開形 $k = (1/v_g)\Omega + (1/2)k_2\Omega^2$ を用いて表せ。

(c) 前問の$\tilde{A}(L,\Omega)$を次式に代入して、$z = L$における振幅の時間波形を求めよ。

$$A(L,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(L,\Omega)e^{-i\Omega t}d\Omega$$

解答にあたっては、時間座標を伝搬時間だけシフト（$\tau = t - L/v_g$）して取り扱うとよい。

(d) 前問の解答より、$z = L$ におけるパルス強度のピーク値及びピーク値から 1/e となる時間幅を表せ。